Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2006/2007

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 5

1. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$ e tutti gli elementi associati a $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

2. Mostrare che in un anello di interi quadratici un numero primo $p \in \mathbb{Z}$ può essere fattorizzato al più in due elementi primi.

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$ e $N(\beta)$ siano relativamente primi in $\mathbb{Z}$. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

4. Posto $\omega := \omega_{-3}$, determinare in $\mathbb{Z}[\omega]$ il quoziente ed il resto della divisione euclidea di $2 + 3\sqrt{-3}$ per $1 + \omega$.

5. Sia $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base intera di $\mathcal{O}_K$ e sia $\gamma \in \mathcal{O}_K$, $\gamma \neq 0$. Mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n\}$ è una base intera per l'ideale I se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

6. Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia I un ideale (risp. un ideale primo) di B. Mostrare che $I \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $I \cap A$ può essere primo anche se I non lo è.

7. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

8. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

9. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5 + \sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5 + \sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.