Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2006/2007

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4

1. Determinare una base intera di $\mathbb{Q}(\theta)$ per $\theta := \sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

3. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5+3i$ e $13+18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

4. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I=(1+3i)$ e $J=(3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I \cap J$.

5. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

6. Sia $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi\ ; a,b \in \mathbb{Z}\ , i^2=-1\} \subseteq \mathbb{C}$ l'anello degli interi di Gauss e sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

   $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } (a+bi)+(p) \to (\bar{a}+\bar{b}X)+(X^2+1)$$

   è un isomorfismo di anelli.

   Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio X^2+1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$, ovvero la congruenza $X^2+1 \equiv 0 \mod p$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

7. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

   $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

8. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

   $$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$