Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2006/2007

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 3

Con $N(\alpha)$ e $Tr(\alpha)$ indichiamo rispettivamente la Norma e la Traccia di un numero algebrico α.

1. Sia K un campo numerico e $\mathcal{O}_K$ il suo anello degli interi. Mostrare che:

   (a) $\alpha \in \mathcal{O}_K$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

   (b) $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

   (c) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $\mathcal{O}_K$;

   (d) Ogni elemento non nullo e non invertibile di $\mathcal{O}_K$ è prodotto di elementi irriducibili.

2. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.

3. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono né coniugati né associati.

4. Sia $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base di $\mathbb{Q}(\theta)$ su $\mathbb{Q}$, dove θ ha grado n su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $m(X)$. Dimostrare le seguenti formule per il discriminante:

   (a) $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = |Tr(\alpha_i \alpha_j)|$;

   (b) $D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N(m'(\theta))$.

5. Sia G un gruppo abeliano additivo e $n \geq 2$. Mostrare che se $ng = 0$ per ogni $g \in G$, allora G è un modulo su $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

6. Sia A un dominio integro. Un elemento $m \in M$ si dice di *torsione* se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Mostrare che l'insieme T degli elementi di torsione di M è un sottomodulo di M.

   M si dice un *modulo di torsione* se $M = T$, si dice *privo di torsione* se $T = 0$. Mostrare che $\frac{M}{T}$ è privo di torsione.

7. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno $\mathbb{Z}$-modulo di torsione.

8. Siano M, M' A-moduli e sia N un sottomodulo di M. Mostrare che:

   (a) L'applicazione $\pi : M \longrightarrow \dfrac{M}{N}$ definita da $x \to x + N$ è un omomorfismo di A-moduli e il suo nucleo è N.

   (b) Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli e $N \subseteq Ker(\varphi)$, allora l'applicazione $\overline{\varphi} : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ definita da $x + N \to \varphi(x)$ è ben definita ed è un omomorfismo di A-moduli.
   Inoltre $\varphi = \overline{\varphi}\pi$ e, se $\psi : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli tale che $\varphi = \psi\pi$, allora $\psi = \overline{\varphi}$.