**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica - a.a.2006/2007**

**AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)**

**Esercizi 1**

1. Costruire esplicitamente i campi:

   $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$, $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}+2i)$, $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5}+2i)$, $\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

2. Sia $K$ un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

3. Siano $a$, $b$ due interi positivi. Mostrare che

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

   per ogni $x$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

4. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che

   $$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\sqrt[m]{3}).$$

5. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,

   $$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$

   per un opportuno $r \geq 2$.

6. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che
   (a) $\alpha$ è algebrico su $F$ se e soltanto se $\alpha^n$ è algebrico su $F$ .
   (b) Se $\alpha$ ha grado dispari su $F$, allora $\alpha^2$ ha lo stesso grado di $\alpha$.

7. Determinare due basi diverse su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi:
   $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt[3]{2}})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}})$.

8. Determinare il grado di $\pi + \frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

9. Determinare l'inverso di $\sqrt{5}+1$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

10. Determinare l'inverso (razionalizzato) di $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

11. Sia $\alpha$ una radice del polinomio $4X^4+5X+10$. Determinare l'inverso di $\alpha^3+\alpha+1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

12. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2})$.

13. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare il grado di $\xi+\xi^{-1}$ su $\mathbb{Q}$.

14. Siano $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva terza dell'unità e $K := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$. Mostrare che $\alpha - \alpha\xi$ è un elemento primitivo per $K$ su $\mathbb{Q}$ mentre $\alpha + \alpha\xi$ non lo è.

15. Sia $\theta$ una radice del polinomio $X^5 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento $\theta^2$.

16. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $m(X) := a_0 + a_1X + \cdots + X^n$. Mostrare che $\alpha$ è un autovalore, di autovettore $\mathbf{v} := (1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dedurne che un numero $\alpha$ è algebrico se e soltanto se è un autovalore di una opportuna matrice (quadrata) su $\mathbb{Q}$.