Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2004/2005

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 3

1. Stabilire quali tra i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ sono simmetrici ed esprimerli in funzione dei polinomi simmetrici elementari:

   $(X + Y)(Y + Z)(X + Z)$; $\quad X^2 + Y^2 + Z^2$;

   $X^2Y + Y^2Z + Z^2X$; $\quad X^2Y + X^2Z + XY^2 + XZ^2 + Y^2Z + YZ^2$.

2. Sia K un ampliamento quadratico e $\alpha \in K$. Mostrare che α è un intero algebrico se e soltanto se la norma $N(\alpha)$ e la traccia $T(\alpha)$ di α sono numeri interi.

3. Sia K un campo numerico e $\mathcal{O}_K$ il suo anello degli interi.

   Verificare che:

   (a) $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$;

   (b) K è il campo dei quozienti di $\mathcal{O}_K$.

4. Sia K un campo numerico e $\mathcal{O}_K$ il suo anello degli interi. Mostrare che:

   (a) $\alpha \in \mathcal{O}_K$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

   (b) $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

   (c) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $\mathcal{O}_K$;

   (d) Ogni elemento non nullo e non invertibile di $\mathcal{O}_K$ è prodotto di elementi irriducibili.

5. Determinare il gruppo delle unità di $\mathcal{O}_K$ quando K è un ampliamento quadratico non reale.

6. Sia K un campo numerico di grado n e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

   Mostrare che $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ se e soltanto se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.

7. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio monico di grado n con radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e sia $\Delta(f)$ il suo discriminante. Mostrare che:

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i \leq n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_i).$$

8. Calcolare il discriminante del polinomio $X^n - 1$.

9. Siano p, q primi distinti. Verificare che vale la Formula di Möbius-Dedekind:

$$\Phi_{pq}(X) = \frac{\Phi_p(X^q)}{\Phi_p(X)}.$$

10. Determinare esplicitamente $\Phi_{15}(X)$ e calcolare il suo discriminante.

11. Mostrare che, se r, s sono due interi positivi e $m = mcm(r, s)$, allora

$$\mathbb{Q}(\xi_r, \xi_s) = \mathbb{Q}(\xi_m).$$