Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello B
7 febbraio 2008

*Cognome*___________________ *Nome*_____________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Sia $n \geq 3$ un numero naturale. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ si consideri l'operazione $*$ definita nel seguente modo:

$$([x]_n, [0]_2) * ([y]_n, [0]_2) = ([x+y]_n, [0]_2)$$

$$([x]_n, [0]_2) * ([y]_n, [1]_2) = ([x+y]_n, [1]_2)$$

$$([x]_n, [1]_2) * ([y]_n, [0]_2) = ([x-y]_n, [1]_2)$$

$$([x]_n, [1]_2) * ([y]_n, [1]_2) = ([x-y]_n, [0]_2)$$

   (a) Sapendo che l'operazione $*$ è associativa, provare che $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, *)$ è un gruppo non abeliano.

   (b) Posto $\sigma = ([1]_n, [0]_2)$ e $\rho = ([0]_n, [1]_2)$, provare che σ genera un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, *)$ isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$ e ρ un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, *)$ isomorfo a $(\mathbb{Z}_2, +)$.

   (c) Stabilire se $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, *)$ è isomorfo a D_4 oppure al gruppo (moltiplicativo) delle unità dei quaternioni.

2. Sia $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo: se $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

$$\varphi(f(X)) := (f(2), f(-3))$$

   (a) Trovare il nucleo e l'immagine di φ.

   (b) Stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X]/\mathrm{Ker}(\varphi)$ è integro.

   (c) Applicare a φ il Teorema Fondamentale di omomorfismo.

3. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ siano $\alpha = 7 + 17i$ e $\beta = -5 + 12i$.

   (a) Mostrare che l'ideale $I := \langle \alpha, \beta \rangle$ è principale e determinare un suo generatore;

   (b) Stabilire se le classi modulo I degli elementi $\gamma = -10 + 11i$ e $\delta = 3 - 5i$ sono invertibili nell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$;

   (c) Mostrare che A ha un unico ideale proprio non nullo M;

   (d) Stabilire se A/M è un campo.

4. Siano $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ e $I := (f(X))$.

   (a) Mostrare che $K := \mathbb{Z}_3[X]/I$ è un campo e, posto $\alpha = X + I$, esplicitare i suoi elementi in funzione di α.

   (b) Determinare il sottogruppo ciclico di $(K^*, \cdot)$ generato da $\alpha + 1$ ed elencare i suoi generatori.