**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005**
**AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi**
**Prova di Esame - Appello B**
15 febbraio 2005

*Cognome*__________________ *Nome*____________________

*Numero di matricola*__________________

**Avvertenza:** Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Sia $C_{21}$ il gruppo delle radici complesse 21-esime dell'unità.
   (a) Verificare che $C_{21}$ è un gruppo ciclico.
   (b) Determinare i suoi generatori.
   (c) Determinare i suoi sottogruppi.

2. Sia

$$Gl_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det A \neq 0 \right\}.$$

(a) Verificare che l'applicazione

$$\phi : (GL_2(\mathbb{C}), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot) \text{ definita da } \phi(A) = \det A$$

è un omomorfismo di gruppi.

(b) Applicare il teorema di omomorfismo.

3. Sia $p \geq 2$ primo e si consideri l'anello

$$R = M_2(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

con l'usuale somma e prodotto fra matrici.

(a) Determinare la cardinalità di $R$.

(b) Verificare che $R$ non è commutativo.

(c) Determinare il centro di $R$,

$$Z(R) = \{x \in R : xy = yx, \text{ per ogni } y \in R\}$$

e verificare che esso è isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

(d) Stabilire se

$$S = Gl_2(\mathbb{Z}_p) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R : \det A \neq 0 \right\}$$

è un sottoanello di $R$.

4. Sia $f(X) = X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (a) Determinare il campo di spezzamento $K$ di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) Stabilire il grado di $K$ su $\mathbb{Q}$.

   (c) Determinare una base di $K$ su $\mathbb{Q}$.