Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello A
24 gennaio 2005

*Cognome*____________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Determinare le classi coniugate del gruppo diedrale D_4 delle isometrie del quadrato.

2. Determinare il gruppo $G = Aut(\mathbb{Z}_{31})$ degli automorfismi di $(\mathbb{Z}_{31}, +)$ e tutti i sottogruppi di G.

3. Determinare gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(6)}$.

4. Si consideri l'insieme $A = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \ ; \quad (a, b)(a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b).$$

Rispetto a queste operazioni, A è un anello commutativo unitario con unità $1 = (1, 0)$.

(a) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_7[X] \longrightarrow A \text{ definita da } \sum a_i X^i \to \sum (a_i, 0)(0, 1)^i$$

è un omomorfismo di anelli;

(b) Determinare Nucleo ed Immagine di φ ed applicare il Teorema di Omomorfismo per gli anelli;

(c) Usando il punto precedente, mostrare che A è un campo, ampliamento semplice di $\mathbb{Z}_7$, e determinare esplicitamente un elemento α di A tale che $A = \mathbb{Z}_7(\alpha)$. Quanti elementi ha A?