Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2004/2005
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 6

1. Sia fissata la matrice : $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Si consideri l'applicazione:

$$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\,, \quad \textstyle\sum_{i=0}^n a_i X^i \to \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i.$$

Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

2. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che

(a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

(b) Se P è un ideale primo di A, l'ideale $P[X]$ è primo in $A[X]$. In particolare, un elemento primo di A è primo anche in $A[X]$.

(Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A[X] \longrightarrow \frac{A}{P}[X]$ definito da $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \to (a_0 + P) + (a_1 + P)X + \ldots + (a_n + P)X^n$)

(c) Un elemento di A è irriducibile in $A[X]$ se e soltanto se lo è in A.

3. Sia A un dominio euclideo rispetto alla valutazione $v : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Mostrare che

(a) $v(1) \leq v(a)$, per ogni $a \in A^*$.

(b) $a \in A^*$ è invertibile se e soltanto se $v(a) = v(1)$.

(c) Se a e b sono associati in A, allora $v(a) = v(b)$.

(d) Se $a, b \in A^*$ sono tali che a divide b e $v(a) = v(b)$, allora a e b sono associati.

(e) Se $a, b \in A^*$ e b non è invertibile, allora $v(a) < v(ab)$.

4. Effettuare la divisione euclidea di $13 + 18i$ per $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

5. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5 + 3i$ e $13 + 18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

6. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

7. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

8. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } a + bi + (p) \to \bar{a} + \bar{b}X + (X^2+1)$$

è un isomorfismo di anelli.

Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}p[X]$.

9. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

10. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

11. Sia $t \in \mathbb{Z}$ tale che $\mid t \mid$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} \ \mid a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{t}$, definiamo la *norma* di α come $N(\alpha) = (a + b\sqrt{t})(a - b\sqrt{t}) = a^2 - b^2 t$.

Mostrare che:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

(c) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

(d) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{t}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

(e) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{t}]$;

(f) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

12. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

13. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

14. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2 + i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

Dimostare poi che gli elementi 10 e $4+2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?