**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a.2004/2005**
**AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)**
**Tutorato 4**

1. Verificare che, se $S$ è un insieme e $A$ e' un anello (commutativo unitario), allora l'insieme $A^S$ di tutte le funzioni da $S$ ad $A$ è un anello con le operazioni "puntuali" definite da

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)\,; \quad (fg)(s) = f(s)g(s).$$

2. Verificare che l'insieme

$$F = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; a, b \in \mathbb{Z}_3 \}$$

è un campo, rispetto alle usuali operazioni di somma e moltiplicazione di matrici.

3. Verificare che i seguenti insiemi numerici sono anelli:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}\,;\ \mathbb{Q}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Q}\}\,;$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\,;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

Quali tra essi sono campi?

4. Si considerino le seguenti matrici di $GL_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che valgono le relazioni:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}.$$

Sia

$$\mathcal{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}\;; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Se $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ poniamo $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottoanello di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Inoltre, se $q \neq 0$, allora

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1} q\overline{q} = \mathbf{1}.$$

Dedurne che $\mathcal{H}$ è un anello unitario e integro ma non commutativo in cui ogni elemento non nullo ha un inverso.

$\mathcal{H}$ si chiama l'*algebra dei quaternioni reali*.

5. Dimostrare che in un anello integro valgono le *Leggi di Cancellazione*:

$$ax = ay \Rightarrow x = y\ ; \quad xa = ya \Rightarrow x = y\ , \quad \text{per ogni} \quad a \neq 0.$$

6. Determinare l'insieme degli elementi invertibili e degli zero divisori dell'anello $\mathbb{Z}_n$ per $2 \leq n \leq 15$.

7. Un elemento $a$ di un anello $A$ si dice *idempotente* se $a^2 = a$.

   Mostrare che, se $A$ è integro, allora gli unici elementi idempotenti di $A$ sono 0 e 1 .

8. Determinare gli elementi invertibili e gli elementi idempotenti dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ delle matrici quadrate ad elementi in $\mathbb{Z}_2$.

9. Mostrare che $A$ è un sottoanello di $\mathbb{Z}_n$ se e soltanto se $A = \bar{d}\mathbb{Z}_n$, dove $d$ è un divisore di $n$.

10. Sia $f(X)$ uno dei seguenti polinomi:

$$15X\,; \quad 15X + 3\,; \quad 6X^2 - 5X + 1\,; \quad 6X^3 - 7X^2 - X + 2.$$

Determinare esplicitamente tutti i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ e ripartirli in classi di polinomi associati.

11. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ .
    (a) $5X$ divide $3X^2$ ;
    (b) $X - 3$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$ ;
    (c) $3(X - 3)$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$ .

12. Sia
$$f(X) := 7X^7 + 6X^6 + 5X^5 + 4X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 1.$$
Calcolare $f(2)$ .

13. Utilizzando l'Algoritmo Euclideo della divisione, determinare il massimo comune divisore monico delle seguenti coppie di polinomi ed una identità di Bezout per esso:
$$f(X) := X^5 + \overline{1}\,; \quad g(X) := \overline{3}X^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X];$$
$$f(X) := X^5 - \frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{6}\,; \quad g(X) := X^3 + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X].$$

14. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]\,, \mathbb{Q}[X]\,, \mathbb{R}[X]\,, \mathbb{C}[X]$ :
$$21X + 3\,; \quad X^2 + X + 3\,; \quad X^3 - 1\,; \quad 2X^4 + 5X^2 + 2.$$

15. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}_5[X]$ :
$$\overline{3}X^2 + \overline{2}X + \overline{2}\,; \quad X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{3}X + \overline{2}\,; \quad X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{1}.$$

16. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$:
$$X^4 + 1\,; \quad X^5 - 1\,; \quad X^6 - 1\,; \quad X^6 - 8.$$

17. Determinare le radici razionali del polinomio
$$f(X) = 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 5X + 2 \in \mathbb{Z}[X].$$

18. Sia $A$ un dominio di integrità. Dimostrare che il polinomio $p(X) \in A[X]$ è irriducibile su $A$ se e soltanto se lo è ogni suo polinomio associato.

19. Siano
$$f(X) = X^5 + \overline{3}X^3 + X^2 + \overline{2}X + \overline{2} \text{ e } g(X) = X^4 + \overline{3}X^3 + \overline{3}X^2 + X + \overline{2}.$$
Determinare gli ideali $(f(X)) \cap (g(X))$ e $(f(X)) + (g(X))$.

20. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:

$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}$ ; $f(X) \to f(0)$;

$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ ; $f(X) \to \overline{f(0)}$;

$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ ; $\sum a_i X^i \to \sum \overline{a_i} X^i$;

$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ ; $f(X) \to f(i)$;

$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $f(X) \to f(\sqrt[3]{2})$.