Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2004/2005
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 2

1. Determinare tutti i sottogruppi ed i gruppi quoziente del gruppo $U(\mathbb{Z}_{15})$ delle unitá di $\mathbb{Z}_{15}$.

2. Sia $\varphi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Mostrare che, se G è finito, $|G| = |Ker\varphi||Im\varphi|$.

3. Sia $\varphi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Mostrare che, se $g \in G$ ha ordine finito n, allora l'ordine di $\varphi(g)$ divide n.

4. Sia $\mathbf{A}_4$ il gruppo alterno di grado 4 e sia $\mathbf{V}_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mostrare che $\mathbf{V}_4$ è normale in $\mathbf{A}_4$ e costruire tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{A}_4 \longrightarrow \mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4$.

5. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi e, nei casi affermativi, applicare il Teorema di Omomorfismo:

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\ \bar{a}_5 \to \bar{a}_{15}\ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\ \bar{a}_5 \to 3\bar{a}_{15}\ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\ \bar{a}_5 \to 5\bar{a}_{15}\ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5\,;\ \bar{a}_{15} \to \bar{a}_5\ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5\,;\ \bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_5\ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\ \bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_{15}\ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\ \bar{a}_{15} \to 5\bar{a}_{15}\ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\,;\bar{a}_{15} \to 2\bar{a}_{15}\ .$

6. Dimostrare che non esiste alcun omomorfismo non banale $\mathbb{Z}_{18} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

7. Costruire tutti i possibili omomorfismi $\mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

8. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

9. Sia $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $z \to \frac{z}{|z|}$.

   Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il Teorema di Omomorfismo. Inoltre interpretare geometricamente tale teorema nel piano di Gauss.

10. Sia $\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $r \rightarrow \cos(2r\pi) + i\sin(2r\pi)$.

    Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

11. Sia S un sottoinsieme di un gruppo moltiplicativo G e sia $H :=< S >$ l'intersezione di tutti i sottogruppi di G contenenti S.

    Mostrare che H è il più piccolo sottogruppo di G contenente S ed è formato da tutti i possibili prodotti finiti del tipo $g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdots g_n^{k_n}$, con $g_i \in S$ e $k_i \in \mathbb{Z}$.

    H si dice il sottogruppo di G *generato* da S e gli elementi di S si dicono i *generatori* di H. Se $S = \{g_1, \ldots, g_s\}$ è finito, si scrive anche $H =< g_1, \ldots, g_s >$.

12. Si considerino le seguenti matrici di $GL_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

    Verificare che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad ;$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \ ; \ \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \ ; \ \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \, .$$

    Il sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$ generato da $\mathbf{i}\,, \mathbf{j}\,, \mathbf{k}$ si chiama il *gruppo delle unità dei quaternioni* e si indica con $\mathbf{H}$.

    (a) Verificare che $\mathbf{H} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$;
    (b) Esplicitare la tabella moltiplicativa di $\mathbf{H}$;
    (c) Verificare che tutti i sottogruppi di $\mathbf{H}$ sono normali;
    (d) Per ogni sottogruppo N di $\mathbf{H}$, costruire il gruppo quoziente $\mathbf{H}/N$.

13. Sia D il sottogruppo di $\mathbf{S}_4$ generato da $\sigma = (1234)$ e $\tau = (24)$.

    (a) Verificare che $\sigma^k \tau = \tau \sigma^{4-k}$, per $k = 0, 1, 2, 3$;
    (b) Verificare che $D = \{(1), \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\}$;
    (c) Esplicitare la tabella moltiplicativa di D;

(d) Determinare il centro di D;

(e) Per ogni sottogruppo N di D, costruire il gruppo quoziente D/N;

(f) Costruire un omomorfismo non banale $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow D$;

(g) Mostrare che $\mathbf{H}$ e D non possono essere isomorfi.

14. Sia $A \in GL_2(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale, cioè tale che $A^{-1} = A^t$.

Mostrare che esiste $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mostrare che, fissato nel piano euclideo reale un riferimento cartesiano, l'applicazione che associa ad ogni isometria piana che fissa l'origine la matrice corrispondente è un isomorfismo tra il gruppo delle isometrie del piano che fissano l'origine ed il gruppo ortogonale di grado 2, $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$. Inoltre, in questo isomorfismo, il gruppo ortogonale speciale di grado 2, $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R})\,; det(A) = 1\}$, corrisponde al sottogruppo delle rotazioni attorno all'origine.

Mostrare che $SO_2(\mathbb{R})$ è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$ di indice 2.

Dedurne che:

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R}).$$

Perciò le isometrie del piano che non sono rotazioni si ottengono tutte componendo una rotazione ρ con la riflessione τ rispetto all'asse delle ordinate e di conseguenza sono tutte riflessioni rispetto ad una retta passante per l'origine.

Infine mostrare che, per ogni riflessione σ ed ogni rotazione ρ, esiste una rotazione ρ' tale che $\sigma\rho = \rho'\sigma$.