

AL 1 - Lavoro guidato

Lunedì 9 ottobre 2006

1. Si consideri l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} . Sia ρ la relazione di divisibilità (cioè, $a\rho b$ se e soltanto se a divide b).
 - (a) Dimostrare che ρ è una relazione d'ordine.
 - (b) Sia $A = \{a, b\} \subset \mathbb{N}$. Dimostrare che $\sup(A) = \text{m.c.m.}(a, b)$ e $\inf A = \text{MCD}(a, b)$.
2. Si consideri la seguente relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \preceq (c, d)$ se $a < c$ oppure se $a = c$ e $b \leq d$.
 - (a) Dimostrare che \preceq è una relazione d'ordine.
 - (b) Determinare l'insieme dei maggioranti di $A = \{(n, 0), n \in \mathbb{N}\}$ e di $B = \{(0, n), n \in \mathbb{N}\}$.
3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = |n|$. Determinare $f(\mathbb{Z})$, $f(\mathbb{N})$, $f(\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\})$. Determinare la controimmagine di $\{1\}$.
4. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2 - 1$. Determinare $f(\mathbb{Z})$, $f(\mathbb{N})$, $f(\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\})$. Determinare la controimmagine di $\{1\}$ e di $\{0\}$.
5. Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(t) = t$, se $t \notin \mathbb{Q}$, $f(t) = 1 - t$, se $t \in \mathbb{Q}$. Determinare se f è iniettiva e suriettiva.
6. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. Siano $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$.
 - (a) Dimostrare che $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
 - (b) Dimostrare che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ e mostrare con un esempio che l'inclusione può essere stretta. Che si può dire quando f è iniettiva?
 - (c) Dimostrare che $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 - (d) Dimostrare che $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.