Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 5 (30 Ottobre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Sia A un insieme e X un suo sottoinsieme. Ricordiamo che la *funzione caratteristica* di X è la funzione $f_X : A \longrightarrow \mathbf{2} = \{0,1\}$ definita da
$f_X(a) = 1$ se $a \in X$ e $f_X(a) = 0$ se $a \notin X$.

   Determinare la funzione caratteristica dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}; \qquad 3\mathbb{N}+2 = \{3x+2 \mid x \in \mathbb{N}\};$$
$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x^5 + 2 = 0\}; \qquad Y = \{x \in \mathbb{N} \mid x^5 + 2 \geq 0\};$$
$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 56\}; \qquad V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 56\}.$$

2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che:

   (a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, per ogni $n \geq 1$;
   (b) $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$, per ogni $n \geq 1$;
   (c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, per ogni $n \geq 1$;
   (d) $(-1)1 + (-1)^2 2^2 + \cdots + (-1)^n n^2 = (-1)^n(1 + 2 + \cdots + n)$, per ogni $n \geq 1$;
   (e) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, per ogni $n \geq 1$;
   (f) $n! > n^2$, per ogni $n \geq 4$;
   (g) $n! > n^3$, per ogni $n \geq 6$.

3. Sia $(a_i)_{i\geq 0}$ la successione di numeri naturali definita da:

$$a_0 = 2; \quad a_1 = 3; \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \text{ per ogni } n \geq 1.$$

   Utilizzando il principio di induzione forte, provare che:

$$a_n = 2^n + 1, \qquad \text{per ogni } n \geq 0.$$

4. Sia $f : X \to X$ una funzione di insiemi. Definiamo $f^1 = f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$, per $n \geq 2$.

   Dimostrare, per induzione su n, che se f è iniettiva f^n è anch'essa iniettiva, per $n \geq 2$.

5. **Caccia all'errore.** Stabilire perché la seguente dimostrazione per induzione è sbagliata.

   Dimostriamo che **Tutti i gatti hanno lo stesso colore**.

   <u>Base dell'induzione</u>. Per $n = 1$ la proposizione è vera perché un gatto ha il suo stesso colore.

   <u>Ipotesi induttiva</u>. Supponiamo che $n-1$ gatti abbiano lo stesso colore.

   <u>Tesi induttiva</u>. Mostriamo che n gatti hanno lo stesso colore. Siano i gatti $g_1, \ldots, g_n$. Per l'ipotesi induttiva, i gatti $g_1, \ldots, g_{n-1}$ ed i gatti $g_2, \ldots, g_n$ hanno lo stesso colore. Allora tutti i gatti $g_1, \ldots, g_n$ hanno lo stesso colore.

6. Effettuare la divisione col resto di a per b *senza usare la calcolatrice*, quando

$$a = 23.578, b = 141; \quad 4.300.920, b = 52; \quad a = 15, b = 2.649.267.549;$$

$$a = -360.529, b = 65; \ a = 438.110, b = -2.796; \ a = -560.123, b = -11.$$

(Cercate la motivazione per svolgere questo esercizio nel racconto di I. Asimov *Nove volte sette*.)

7. Usando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, determinare il massimo comune divisore (positivo) delle seguenti coppie di interi e almeno due differenti identità di Bézout per esso:

(2181, 450); (-335,1080); (0, 11); (-722, -415).

8. Dimostrare che, scelti comunque $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $d = MCD(a, b)$, risulta:

   (a) $MCD(ac, bc) = |c|d$;

   (b) $MCD(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

   (c) $MCD(a, b) = 1 = MCD(a, c) \Leftrightarrow MCD(a, bc) = 1$.

9. Scrivere:

   (a) 3147 in base 7 e in base 9;

   (b) 17, 121, 1331, 2745 in base 11;

   (c) $(24332)_3$; $(100111)_2$; $(1234)_5$ in base 10;

   (d) $(24332)_3$ in base 7.

10. Con il *Crivello di Eratostene*, determinare tutti i numeri primi minori di 100.