Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 4 (23 Ottobre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. (a) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite rispettivamente da

$$f(x) = (2x - 3)/2, \quad g(x) = x - 7.$$

Verificare che f e g sono biiettive, $f \circ g = g \circ f$ e $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) Se A è un insieme e $f, g : A \to A$ sono funzioni biiettive, dimostrare che $f \circ g = g \circ f$ se e soltanto se $g^{-1} \circ f^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione di insiemi. Se X è un sottoinsieme non vuoto di A e Y è un sottoinsieme non vuoto di B, poniamo

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}; \quad f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}.$$

Mostrare che, comunque scelti X, X' sottoinsiemi non vuoti di A e Y, Y' sottoinsiemi non vuoti di B, risulta:

$f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$; $\quad f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$.

$f(X \setminus X') \supseteq f(X) \setminus f(X')$; $\quad f^{-1}(Y \setminus Y') = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y')$.

Trovare inoltre un esempio in cui risulta $f(X \setminus X') \neq f(X) \setminus f(X')$.

3. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione di insiemi. Mostrare che:
   (a) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$, per ogni sottoinsieme non vuoto X di A ;
   (b) $Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$, per ogni sottoinsieme non vuoto Y di B ;
   (c) f è iniettiva se e soltanto se $X = f^{-1}(f(X))$, per ogni sottoinsieme non vuoto X di A ;
   (d) f è suriettiva se e soltanto se $Y = f(f^{-1}(Y))$, per ogni sottoinsieme non vuoto Y di B .

4. Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c\}$ e sia $P(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di A. Se ρ è una relazione di equivalenza su A, indichiamo con $[a]$ la classe d'equivalenza di a e con A/ρ l'insieme quoziente di A rispetto a ρ.

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

$[a] \in A$	$[a] \subseteq A$	$[a] \subseteq P(A)$	$a \subseteq [a]$	$\emptyset \subseteq [a]$
$[a] \in P(A)$	$[a] \in A/\rho$	$a \in A/\rho$	$[a] \subseteq A/\rho$	$a \subseteq A/\rho$
$A \subseteq A/\rho$	$A/\rho \subseteq A$	$a \in P(A/\rho)$	$[a] \in P(A/\rho)$	$\{[a]\} \in P(A/\rho)$.

5. Definire esplicitamente tutte le possibili relazioni di equivalenza su un insieme di 2, 3, 4 elementi.

6. Sia f una delle seguenti applicazioni:

   - $f : \mathbb{N} \to \{1, -1\}$ definita da:

   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ pari;} \\ -1, & \text{se } x \text{ dispari.} \end{cases}$$

   - $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da: $f(x) = (x+1)^2$.
   - $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da $x \mapsto [x]$, dove $[x]$ è la *parte intera* di x, cioè $[x] \in \mathbb{Z}$ è quell'intero tale che $x = [x] + r$ con $0 \leq r < 1$.

   Se A è il dominio di f e $\equiv_f$ è la relazione nucleo di f,

   (a) Determinare la classe di equivalenza $\overline{x}$ di ogni elemento $x \in A$ e un buon rappresentante per essa;

   (b) Definire esplicitamente la biiezione canonica

   $$\frac{A}{\equiv_f} \to Im(f), \quad \overline{x} \to f(x).$$

7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e sia $\equiv_f$ la relazione nucleo di f.

   (a) Determinare $Im(f)$.

   (b) Determinare le classi di equivalenza di $\mathbb{R}$ rispetto a $\equiv_f$.

   (c) Mostrare che la biiezione canonica $\dfrac{\mathbb{R}}{\equiv_f} \to Im(f)$, $\overline{x} \to f(x)$, induce una biiezione tra l'insieme dei numeri reali positivi e l'insieme $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R}\,; 0 < x \leq 1\}$.

8. **Caccia all'errore.** Stabilire perché il seguente ragionamento è sbagliato.

   Ogni corrispondenza ρ su un insieme A che è simmetrica e transitiva è anche riflessiva. Infatti, per ogni $a, b \in A$, se $a\rho b$, allora per la proprietà simmetrica si ha anche $b\rho a$ e per la proprietà transitiva $a\rho a$.

   Suggerimento. Per capire che cosa non va, costruire una relazione simmetrica e transitiva ma non riflessiva su un insieme di due elementi.