Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 10 (18 Dicembre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Siano A un anello commutativo unitario e $a, b \in A$. Mostrare che
$$a = ub, \text{ per qualche } u \in \mathcal{U}(A) \Leftrightarrow a \text{ divide } b \text{ e } b \text{ divide } a.$$
In questo caso, a e b si dicono *associati*. Mostrare inoltre che la relazione
$$a \, \rho \, b \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ sono associati}$$
è una relazione di equivalenza su A.

2. Sia A un dominio di integrità. Dimostrare che il polinomio $p(X) \in A[X]$ è irriducibile su A se e soltanto se lo è ogni suo polinomio associato.

3. Sia $f(X)$ uno dei seguenti polinomi:
$$21X\,; \quad 21X + 7\,; \quad 6X^2 - 5X + 1\,; \quad 6X^3 - 7X^2 - X + 2.$$
Determinare esplicitamente tutti i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ e ripartirli in classi di polinomi associati (in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$).

4. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$.
   (a) $3X$ divide $7X^2$;
   (b) $X - 3$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$;
   (c) $3(X - 3)$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$.

5. Mostrare che il polinomio $\overline{2}X^3 + \overline{2}X + \overline{3}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_8[X]$, determinando esplicitamente un suo inverso.

6. Utilizzando l'Algoritmo Euclideo della divisione, determinare il massimo comune divisore monico delle seguenti coppie di polinomi ed una identità di Bezout per esso:
$$f(X) := X^5 + \overline{1}\,; \quad g(X) := \overline{3}X^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X]\,;$$
$$f(X) := X^5 - \tfrac{1}{3}X^4 - \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{6}\,; \quad g(X) := X^3 + \tfrac{2}{3}X^2 + \tfrac{2}{3}X - \tfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

7. Sia $f(X) := 7X^7 + 6X^6 + 5X^5 + 4X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 1$. Applicare il Teorema del Resto per calcolare $f(2)$.

8. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici razionali e in caso affermativo determinarle esplicitamente.

   $$3X^5 + 3X^4 - 14X^3 - 5X^2 - 5X - 2; \quad X^5 - 2X^3 + X^2 - 8X - 4.$$

9. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[X]$:

   $$5X^4 - 6X^2 + 2\,;\; X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X - 3\,;\; 6X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 7X + 2.$$

10. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_5[X]$:

    $$\overline{3}X^2 + \overline{2}X + \overline{2}\,; \quad X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{3}X + \overline{2}\,; \quad X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{1}\ .$$