Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 1 (2 Ottobre 2006)
A cura di **Chiara Valenti**

1. Negare le seguenti Proposizioni:
   (a) Tutti gli uomini sono mortali;
   (b) Esiste un numero intero che non è multiplo di 3;
   (c) Ogni intero che è divisibile per 2 e 6 è divisibile per 12;
   (d) Ogni intero che è divisibile per 12 è divisibile per 2 e 6;
   (e) Se domani non piove, vado al mare;
   (f) Se domani non piove, vado al mare o in collina;
   (g) Se domani piove, sto a casa e leggo un libro.
2. Dimostrare per contrapposizione la seguente proposizione:
   Se a e b sono due numeri reali tali che $a \neq b$, allora $\sqrt{ab} \neq (a+b)/2$.
3. Dimostrare per assurdo che la somma di tre interi consecutivi divisa per 12 non può dare resto uguale a 2.
4. Dimostrare per assurdo che $\sqrt[3]{5}$ è irrazionale.
   Suggerimento: Imitare la dimostrazione data a lezione del fatto che $\sqrt{2}$ è irrazionale.
5. Determinare $A \cup B$ e $A \cap B$ nei seguenti casi:
   (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x - 4 > 0\}$.
   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-3x+4}{4x-1} \leq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x-1}{1-x} \geq 0\}$.
6. Siano $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 10x + 16 \leq 0\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 4 \geq 0\}$. Determinare $A \Delta B$.
7. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 30\}$. Siano $B = \{x \in A \mid x = 3n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in A \mid x = 5m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$.
   Determinare $B \cup C$, $B \cap C$, $B - C$, e $B \Delta C$.
8. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi; verificare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (a) $A \subseteq B$;
   (b) $A \cup B = B$;
   (c) $A \cap B = A$;
   (d) $A \cap \mathcal{C}B = \emptyset$;
   (e) $\mathcal{C}B \subseteq \mathcal{C}A$;
   (f) $A - B = \emptyset$.

9. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

   (a) $A \cap B \subseteq A \cup B$;

   (b) $A \cap B = A \cup B \iff A = B$;

   (c) $\mathcal{C}A \subseteq B$ e $\mathcal{C}A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$; è vero il viceversa?

   (d) $\mathcal{C}(A \cap \mathcal{C}B) \cup B = \mathcal{C}A \cup B$;

   (e) $B = (A \cap \mathcal{C}B) \cup (\mathcal{C}A \cap B) \iff A = \emptyset$;

   (f) $A - B = \mathcal{C}B - \mathcal{C}A = A \cap \mathcal{C}B$.

   (g) $A = B \iff \mathcal{C}B = \mathcal{C}A$.

10. Siano X un insieme non vuoto, A, B e C suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

    (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

    (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

    (c) $A \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap (B \cup C) = A \cap B$;

    (d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;

    (e) $A \cap B \subset \mathcal{C}C\,,\, A \cup C \subset B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;

    (f) $A \subseteq \mathcal{C}(B \cup C)\,,\, B \subseteq \mathcal{C}A \cup C) \Rightarrow B = \emptyset$;

11. Se un terzo dei giocatori di scacchi è un matematico e due quinti dei matematici giocano a scacchi, sono di più i matematici o i giocatori di scacchi?