Anelli di funzioni di Kronecker, Anelli di Nagata e operazioni (semi)star associate: una panoramica

Marco Fontana

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi "Roma Tre"

Scheda del PRIN 2008

Anelli commutativi e loro moduli, gruppi abeliani e applicazioni
Coordinatore Nazionale: Luigi Salce (Padova)

- Padova
  Luigi Salce
  Dik Dikranjan (UD)
  Paolo Zanardo
  Anna Giordano Bruno
  Gabriele Fusacchia

- "Roma Tre"
  Marco Fontana
  Stefania Gabelli
  Francesca Tartarone
  Alice Fabbri
  Carmelo Finocchiaro
  Giampaolo Picozza

- Napoli "Federico II"
  Claudia Metelli
  Clorinda De Vivo

Roma Tre

1. Aspetti algebrici e topologici degli spazi di anelli di valutazione (superficie astratte di Riemann-Zariski): anelli di funzioni di Kronecker e di Halter-Koch, topologia degli ultrafiltri e topologia costruibile.
2. Fattorizzazione di ideali, Proprietà della traccia e domini di tipo-Prüfer.
3. Piattezza di un ideale nell'anello dei suoi endomorfismi, gruppo delle classi ed operazioni star.

Padova

1. Moduli iniettivi su domini di integrità ed operazioni star.
2. Entropia algebrica di endomorfismi di moduli e gruppi abeliani.
3. Gruppi abeliani topologici.

Napoli

1. Studio dei B(2)-gruppi di Butler.
2. Studio dell'entropia di Peters per gruppi abeliani senza torsione di rango finito.

§0. Genesi

Attorno alla metà del Secolo XIX, E.E. Kummer si accorse che gli anelli degli interi ciclotomici non possedevano sempre la proprietà di fattorizzazione unica.

Pochi anni più tardi egli introdusse il concetto di "numero ideale" allo scopo di "ristabilire" una qualche forma di fattorizzazione negli anelli degli interi ciclotomici con esponente primo. (Successivamente, nel 1856, egli generalizzò tale teoria al caso di anelli di interi ciclotomici con esponente qualunque.)

Nel 1877, R. Dedekind scriveva ad uno dei sui ex-allievi E. Selling che uno dei problemi di punta su cui aveva lavorato per anni era quello di estendere la teoria di Kummer al caso generale degli anelli di interi algebrici.

Dedekind ammetteva di avere lavorato a lungo senza successo a tale questione prima di pervenire alla pubblicazione della prima versione della sua teoria nel 1871 (apparsa come XI supplemento a "Vorlesungen über Zhalentheorie" di Dirichlet).

La teoria dei domini di Dedekind, nella forma in cui è nota attualmente, si basa sulle idee e sui risultati originali di Dedekind. Il punto di vista di Dedekind si basa sulla nozione di "ideale" (o, "numero ideale") per pervenire a quello che è uno dei risultati fondamentali della sua teoria: *in un qualunque anello di interi algebrici, ogni ideale proprio si fattorizza in modo unico come prodotto di ideali primi*.

L. Kronecker raggiunse essenzialmente lo stesso obiettivo di Dedekind nel 1859, circa 12 anni dopo il lavoro pioneristico di Kummer (e circa 12 anni prima di Dedekind).
Tuttavia, Kronecker non pubblicò nulla a riguardo fino al 1882 (il suo lavoro apparve nel "Crelle's Journal" come tributo al 50-esimo anniversario del Dottorato di Kummer).

La teoria di Kronecker è valida in un contesto più ampio di quello degli anelli di interi algebrici e risolve un problema anche più generale di quello "sistemato" dalla teoria di Dedekind.
Infatti, l'obiettivo della teoria di Kronecker è quello di estendere la teoria della divisibilità tra elementi ad "entità più generali" in modo tale che ogni insieme finito di elementi, in questo ambiente ampliato, abbia sempre un MCD.

****

Le principali referenze relative alla costruzione "classica" dell'anello delle funzioni di Kronecker sono

L. Kronecker (1882), W. Krull (1936), H. Weyl (1940), H.M. Edwards (1990).

E' probabilmente per questa ragione che gli oggetti di base della teoria di Kronecker (corrispondenti in un certo senso agli "ideali" della teoria di Dedekind) sono chiamati "divisori".

Sia D_0 un PID con campo dei quozienti K_0 e sia K un campo, estensione finita del campo K_0. Allora, *i divisori di Kronecker* sono precisamente tutti i possibili "MCD simbolici" degli insiemi finiti di elementi di K (algebrici su K_0). *Un divisore* si dice *intero* se è un "MCD simbolico" di un insieme finito di elementi nella chiusura integrale D di D_0 in K.

Uno dei punti chiave della teoria di Kronecker è quello che è possibile dare una descrizione esplicita dei "divisori" dell'estensione $K_0 \subset K$. Infatti, i divisori possono essere rappresentati da classi di equivalenza di funzioni razionali e un dato polinomio in $D[X]$ rappresenta sempre una classe di un divisore intero (associato all'insieme dei suoi coefficienti).

Più precisamente, nel contesto sopra descritto e con una terminologia più moderna *l'anello delle funzioni di Kronecker di D* è dato da:

$$\begin{aligned}\mathrm{Kr}(D) &:= \left\{ \tfrac{f}{g} \mid f, g \in D[X],\ g \neq 0,\ \ e\ \ \mathbf{c}(f) \subseteq \mathbf{c}(g) \right\} \\ &= \left\{ \tfrac{f'}{g'} \mid f', g' \in D[X]\ \ e\ \ \mathbf{c}(g') = D \right\},\end{aligned}$$

(dove $\mathbf{c}(h)$ denota *il contenuto* di un polinomio $h \in D[X]$, i.e., l'ideale di D generato dai coefficienti di h).

Notiamo che la precedente uguaglianza vale perché stiamo supponendo che D è la chiusura integrale di un PID in un'estensione finita di campi e, quindi, D è un dominio di Dedekind.

In tale caso, infatti, per ciascun polinomio non nullo $g \in D[X]$, $\mathbf{c}(g)$ è un ideale invertibile di D e, quindi, prendendo un polinomio $u \in K[X]$ tale che $\mathbf{c}(u) = (\mathbf{c}(g))^{-1}$, allora

$$f/g = uf/ug = f'/g', \text{ con } f' := uf,\ g' := ug \in D[X]$$

ed, ovviamente, $\mathbf{c}(g') = D$.

Tra le proprietà principali dell'anello delle funzioni di Kronecker ci sono le seguenti:

(1) $\mathrm{Kr}(D)$ *è un dominio di Bézout (i.e., ogni insieme finito di elementi non tutti nulli ammette un MCD e tale MCD può essere espresso come una combinazione lineare di questi elementi) e*
$D[X] \subseteq \mathrm{Kr}(D) \subseteq K(X)$
(in particolare $K(X)$ *è il campo dei quozienti di* $\mathrm{Kr}(D)$*).*

(2) *Siano* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in D$ *e sia* $f := a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in D[X]$, *allora:*

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)\mathrm{Kr}(D) = f\mathrm{Kr}(D) \;\; (\textit{perciò, } \mathrm{MCD}_{\mathrm{Kr}(D)}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = f),$$

$$f\mathrm{Kr}(D) \cap K = (a_0, a_1, \ldots, a_n)D = \mathbf{c}(f)D \;\; (\textit{quindi, } \mathrm{Kr}(D) \cap K = D).$$

La teoria classica di Kronecker ha avuto due principali tipi di estensioni:

- Ad iniziare dal 1936, W. Krull ha esteso l'anello di funzioni di Kronecker al caso più generale di domini integralmente chiusi (non necessariamente noetheriani), introducendo i sistemi moltiplicativi di ideali associati a particolari operazioni "star": le operazioni star `e.a.b.`.

- Nel 1956, M. Nagata ha introdotto e studiato, *per un qualunque dominio D*, il dominio

$$D(X) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in D[X],\ g \neq 0 \ \ e \ \ \mathbf{c}(g) = D \right\}.$$

E' ben noto che

$D(X)$ coincide con $\mathrm{Kr}(D)$ $(= \{f/g \mid f, g \in D[X] \text{ e } \mathbf{c}(f) \subseteq \mathbf{c}(g)\})$ se (e soltanto se) D è un dominio di Prüfer.

§1. La "generalizzazione" di Krull dell'anello delle funzioni di Kronecker

Una delle principali difficoltà per la generalizzazione della teoria di Kronecker è legata al fatto che il **Lemma di Gauss** per i contenuti dei polinomi vale nell'ambito dei domini di Dedekind (o, più generalmente, per i domini di Prüfer (H.Tsang Tang, 1965; R. Gilmer, 1967)):

Siano $f, g \in D[X]$, dove D è un dominio di Prüfer, allora:

$$\mathbf{c}(fg) = \mathbf{c}(f)\mathbf{c}(g)\,.$$

Nel caso generale, si ha soltanto che $\mathbf{c}(fg) \subseteq \mathbf{c}(f)\mathbf{c}(g)$. Tuttavia, vale il seguente risultato:

Lemma di Dedekind-Mertens.
Sia D un dominio e siano $f, g \in D[X]$. Si ponga $m := \deg(g)$, allora:

$$\mathbf{c}(f)^m\mathbf{c}(fg) = \mathbf{c}(f)^m\mathbf{c}(f)\mathbf{c}(g) = \mathbf{c}(f)^{m+1}\mathbf{c}(g)\,.$$

Per superare questa ostruzione alla possibilità di definire un anello di funzioni di Kronecker anche in un contesto più generale, Krull introdusse sistemi moltiplicativi di ideali aventi una "adeguata proprietà di cancellazione", definiti per mezzo delle cosidette operazioni star `e.a.b.` (= *endlich arithmetisch brauchbar*).

Sia $\mathfrak{F}(D)$ [rispettivamente, $\mathbf{f}(D)$] l'insieme degli ideali frazionari [rispettivamente, ideali frazionari finitamente generati] non nulli di un dominio D.

Un'applicazione $\star : \mathfrak{F}(D) \to \mathfrak{F}(D)$, $I \mapsto I^\star$, è detta *una operazione star di D* se presi comunque $z \in K$, $z \neq 0$, $I, J \in \mathfrak{F}(D)$, allora:

$(\star_1)$ $(zD)^\star = zD$, $(zI)^\star = zI^\star$;

$(\star_2)$ $I \subseteq J \Rightarrow I^\star \subseteq J^\star$;

$(\star_3)$ $I \subseteq I^\star$ e $I^{\star\star} := (I^\star)^\star = I^\star$.

Una *operazione star* `e.a.b.` è un'operazione star $\star$ tale che, presi comunque $I, J, H \in \mathbf{f}(D)$:

$$(IJ)^\star \subseteq (IH)^\star \;\Rightarrow\; J^\star \subseteq H^\star .$$

In questo contesto, Krull ristabilisce l'importante identità relativa al contenuto del prodotto di polinomi:

Gauss-Krull Lemma: *Sia $\star$ un'operazione star* `e.a.b.` *su un dominio D e siano $f, g \in D[X]$, allora:*

$$\mathbf{c}(fg)^\star = \mathbf{c}(f)^\star \mathbf{c}(g)^\star .$$

N.B. Krull ha introdotto la nozione (più forte) di operazione star `a.b.` nel primo di una serie di lavori intitolati Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche ... (1936).

Usando il linguaggio e le tecniche delle operazioni star, nel 1936 Krull ha introdotto una nozione generale di anello di funzioni di Kronecker con un comportamento simile a quello del caso classico, studiato da Kronecker.

Sia D un dominio integralmente chiuso con campo dei quozienti K e sia $\star$ una operazione star `e.a.b.` su D, allora:

$$\mathrm{Kr}(D,\star) := \{f/g \mid f, g \in D[X],\ g \neq 0,\ \ e\ \ \mathbf{c}(f)^\star \subseteq \mathbf{c}(g)^\star\}$$

è un dominio con campo dei quozienti $K(X)$, detto l'anello delle funzioni di Kronecker relativo all'operazione $\star$.

Tale anello gode delle seguenti proprietà.

(1) $\mathrm{Kr}(D,\star)$ *è un dominio di Bézout e* $D[X] \subseteq \mathrm{Kr}(D,\star) \subseteq K(X)$.

(2) *Siano* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in D$ *e sia* $f := a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in D[X]$, *allora:*

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)\mathrm{Kr}(D,\star) = f\mathrm{Kr}(D,\star)\,,$$
$$f\mathrm{Kr}(D,\star) \cap K = ((a_0, a_1, \ldots, a_n)D)^\star\,.$$

(In particolare, $\mathrm{Kr}(D,\star) \cap K = D^\star = D$ *.)*

In particolare, la costruzione precedente può essere applicata:

- quando $\star$ è *l'operazione identità d* su un dominio di Prüfer D; questo caso permette di ritrovare l'anello delle funzioni di Kronecker "classico", nel quale D è un dominio di Dedekind (= Prüfer + noetheriano).

- quando $\star$ è *la v–operazione di Artin* su un dominio di Krull D (dal momento che, in questo caso, la v–operazione è una operazione star e.a.b., coincidendo con la w–operazione definita dai sovranelli di valutazione discreta (di rango 1) di D:

$$I \mapsto I^w := \bigcap\{ID_P \mid P \in \mathrm{Spec}^1(D)\}$$

(dove $I^v := (D : (D : I))$ per $I \in \mathfrak{F}(D)$).

E' da notare che, questo secondo caso, fornisce un'effettiva estensione della teoria di Kronecker, permettento la costruzione di un anello di funzioni di Kronecker nel caso di domini di Krull.
[Ricordo che:

Prüfer + Krull $\Leftrightarrow$ Dedekind ($\Leftrightarrow$ Prüfer + Noether).]

§2. La "generalizzazione" di Nagata dell'anello delle funzioni di Kronecker

La costruzione dell'anello di Nagata è possibile per ogni anello (anche non integro ed anche non integralmente chiuso). Qui, consideriamo comunque in caso integro, cioè il caso di un dominio D:

$$\mathrm{Na}(D) := D(X) := \{f/g \mid f, g \in D[X] \ \ e \ \ \mathbf{c}(g) = D\} \ ,$$

(Krull (1943), Nagata (1962), Samuel (1964)).
In questa situazione $\mathrm{Na}(D)$ è un dominio, ma non un dominio di Bézout. Precisamente, non è difficile vedere che

$\mathrm{Na}(D)$ *è un dominio di Bézout se (e soltanto se) D è un dominio di Prüfer*.

Equivalentemente:

$\mathrm{Na}(D)$ *coincide con* $\mathrm{Kr}(D)$ *se (e soltanto se) D è un dominio di Prüfer*.

Particolarmente semplice è il caso di Prüfer locale. Cioè, se V è un anello di valutazione di un campo K, se v è la valutazione associata a V e se Γ il gruppo dei valori di v, allora,

l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} w : K[X] & \rightarrow & \Gamma \cup \{\infty\} \\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i & \mapsto & w(f) := \begin{cases} \infty & \text{se } f = 0; \\ \min\{v(a_i) \mid 0 \leq i \leq n\} & \text{altrimenti,} \end{cases} \end{array}$$

definisce naturalmente una valutazione *w su $K(X)$*, chiamata *estensione gaussiana della valutazione v* (ponendo per $f/g \in K(X)$, $w(f/g) := w(f) - w(g)$).

L'anello della valutazione w, denotato con W, è tale che:

$$W = \mathrm{Kr}(V) = \mathrm{Na}(V) = V(X)\,.$$

L'interesse per lo studio dell'anello di Nagata $D(X)$ è legato a varie proprietà di cui esso gode, in particolare a "nuove" proprietà che lo stesso D può non avere, pur mantenendo uno strettissimo rapporto con le proprietà di D e dei suoi ideali.

(a) *L'applicazione $M \mapsto MD(X)$ stabilisce una corrispondenza 1-1 tra gli ideali massimali di D e gli ideali massimali di $D(X)$.*
(b) *Per ogni ideale I di D,*

$$ID(X) \cap D = I, \qquad D(X)/ID(X) \cong (D/I)(X);$$

I è finitamente generato se e soltanto se $ID(X)$ è finitamente generato.

Tra le "nuove" proprietà acquisite da $D(X)$

(c) *il campo residuo in ogni massimale di $D(X)$ è infinito;*
(d) *ogni ideale contenuto in una unione finita di ideali è contenuto in uno di essi;*
(e) *ogni ideale finitamente generato localmente principale è principale (perciò, $\mathrm{Pic}(D(X)) = 0$).*

(cfr. J. Arnold (1969), Gilmer-Mott (1970), Gilmer (1972), Quartararo-Butts (1975), D.D. Anderson (1977), D. Ferrand (1982)).

Principali obiettivi di questa conferenza

- Richiamare alcuni risultati apparsi in una recente serie di lavori in collaborazione con K. Alan Loper (Ohio State University), relativi a costruzioni generali di anelli di funzioni di Kronecker e di anelli di Nagata, definiti a partire da *operazioni semistar arbitrarie*.

  In particolare,

  ▶ mostrare alcune importanti similitudini di comportamento della struttura moltiplicativa degli ideali negli anelli di Nagata $\mathrm{Na}(D, \star)$ e di Kronecker $\mathrm{Kr}(D, \star)$, costruiti a partire da una operazione semistar $\star$ di tipo generale e

  ▶ mostrare che gli anelli di Nagata $\mathrm{Na}(D, \star)$ e di Kronecker $\mathrm{Kr}(D, \star)$ determinano delle nuove operazioni semistar su D, che estendono rispettivamente l'operazione w (Glaz-Vasconcelos, Houston, Wang-McCasland) e l'operazione b (tali operazioni forniscono nuovi strumenti di indagine nello studio di varie classi di domini).

- Accennare ad alcune applicazioni degli anelli di funzioni di Kronecker al problema delle rappresentazioni (irridondanti) di domini integralmente chiusi come intersezioni di sopraanelli di valutazione e a problemi di densità topologica nello spazio di Zariski degli anelli di valutazione di un dato campo. Cenni alle tesi di dottorato di A. Fabbri e C. Finocchiaro.

Notazioni ed alcuni fatti basilari sulle operazioni star e semistar

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Sia

- $\overline{\mathfrak{F}}(D)$ l'insieme dei D-sottomoduli non nulli di K,
- $\mathfrak{F}(D)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di D, e
- $\mathbf{f}(D)$ l'insieme dei D-sottomoduli finitamente generati e non nulli di K.

Allora, ovviamente,

$$\mathbf{f}(D) \subseteq \mathfrak{F}(D) \subseteq \overline{\mathfrak{F}}(D).$$

Nel 1994 , Okabe e Matsuda hanno introdotto la nozione di operazione semistar $\star$ su un dominio D, come una generalizzazione naturale del concetto di operazione star considerato da Krull (permettendo $D \neq D^\star$).

• Un'applicazione $\star : \overline{\mathfrak{F}}(D) \to \overline{\mathfrak{F}}(D)$, $E \mapsto E^\star$ è chiamata *un'operazione semistar su* D se, presi comunque $0 \neq z \in K$, $E, F \in \overline{\mathfrak{F}}(D)$, valgono le seguenti proprietà:

($\star\star_1$) $(zE)^\star = zE^\star$;

($\star_2$) $E \subseteq F \Rightarrow E^\star \subseteq F^\star$;

($\star_3$) $E \subseteq E^\star$ and $E^{\star\star} := (E^\star)^\star = E^\star$.

Vorrei far notare che J. Elliott (2010) ha sviluppato molto recentemente una teoria molto generale delle operazioni di chiusura (in collegamento anche con le operazioni semistar) ed ha mostrato per esempio che, per un'operazione di chiusura su $\overline{\mathfrak{F}}(D)$, la condizione **($\star\star_1$)** può essere sostituita con la seguente:

$$EF \subseteq G^\star \Rightarrow E^\star F^\star \subseteq G^\star \text{ for all } E, F, G \in \overline{\mathfrak{F}}(D).$$

- Se $D^\star = D$, allora $\star$ ristretta a $\mathfrak{F}(D)$ definisce *una operazione star su D*
- Una *operazione semistar di tipo finito* $\star$ è un'operazione tale che

$$E^\star = E^{\star_f} := \bigcup\{F^\star \mid F \subseteq E, F \in \mathbf{f}(D)\} \quad \text{per ogni } E \in \overline{\mathfrak{F}}(D).$$

- Un ideale non nullo I of D è chiamato *quasi-$\star$-ideale* se $I^\star \cap D = I$, un *quasi-$\star$-massimale* è un elemento massimale nell'insieme di tutti i quasi-$\star$-ideali propri.

Non è difficile dimostrare che

- *un ideale quasi-$\star$-massimale è un ideale primo;*
- *un quasi-$\star_f$-ideale proprio è contenuto in un quasi-$\star_f$-massimale.*

Denotiamo con $\mathrm{QMax}^\star(D)$ l'insieme degli ideali quasi-$\star$-massimali. Da quanto precede, si ricava che $\mathrm{QMax}^{\star_f}(D) \neq \emptyset$.

§4. L'anello di Nagata associato ad un'operazione semistar

Una prima generalizzazione del "classico" anello di Nagata è stata considerata da Kang (1987, 1989) in relazione all'operazione v di Artin.

Più generalmente, si può considerare l'anello di Nagata in relazione ad una qualunque operazione semistar definita su un dominio D.

L'anello di Nagata relativo ad un'operazione semistar $\star$ è definito come segue:

$$\mathrm{Na}(D,\star) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in D[X],\ g \neq 0,\ \mathbf{c}(g)^\star = D^\star \right\}.$$

Si noti che, $\mathrm{Na}(D,\star) = \mathrm{Na}(D,\star_f)$. Quindi, non è restrittivo supporre che $\star$ sia di tipo finito.

Se $\star = d$ è l'operazione (semi)star identità su D, allora:

$$\mathrm{Na}(D,d) = D(X).$$

Il seguente risultato raccoglie alcune proprietà dell'anello di Nagata generale, associato ad un'operazione semistar (Kang (1989), Fontana-Loper (2003)).

Proposizione 1

Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio D. Poniamo:

$$\mathcal{N}(\star) := \mathcal{N}_D(\star) := \{h \in D[X] \mid \mathbf{c}(h)^\star = D^\star\}\,.$$

(1) $\mathrm{Na}(D, \star) = D[X]_{\mathcal{N}(\star)} = \bigcap\{D_Q(X) \mid Q \in \mathrm{QMax}^{\star_f}(D)\}\,.$

(2) $\mathrm{QMax}^{\star_f}(D)$ *coincide con l'immagine canonica in* $\mathrm{Spec}(D)$ *di* $\mathrm{Max}(\mathrm{Na}(D, \star))$, *i.e.,* $\mathrm{QMax}^{\star_f}(D) = \{M \cap D \mid M \in \mathrm{Max}(\mathrm{Na}(D, \star))\}\,.$

Come semplice applicazione del risultato precedente, abbiamo una descrizione degli ideali t-massimali di un dominio (dove $t := v_f$):

Sia D un dominio, allora Q è un t–ideale massimale di D se e soltanto se $Q = M \cap D$, per qualche $M \in \mathrm{Max}(\mathrm{Na}(D, v))$.

§5. L'operazione semistar associata a $\mathrm{Na}(D,\star)$

Teorema 2

Sia $\star$ un'operazione semistar su D, ed $E \in \overline{\mathfrak{F}}(D)$.
Sia $\tilde{\star}$ l'operazione semistar definita come segue:

$$E^{\tilde{\star}} := \bigcap\{ED_Q \mid Q \in \mathrm{QMax}^{\star_f}(D)\} .$$

(1) $\tilde{\star} \leq \star_f \leq \star$ *e* $\mathrm{Na}(D,\widetilde{\star}) = \mathrm{Na}(D,\star_f) = \mathrm{Na}(D,\star)$.
(2) $E^{\tilde{\star}} = E\mathrm{Na}(D,\star) \cap K$.

Quando $\star$ coincide con la v–operazione, allora $\widetilde{v}$ coincide con l'operazione w definita da

$$E^w := \bigcup\{(E : H) \mid H \in \mathbf{f}(D) \text{ e } H^v = D\} \text{, cioè}$$

$$E^w = \bigcap\{ED_Q \mid Q \in \mathrm{Max}^t(D)\} = E\mathrm{Na}(D,v) \cap K .$$

(lavori di Glaz-Vasconcelos (1977), Hedstrom-Houston (1980), Wang-McCasland (1997), D.D. Anderson-Cook (2000)).

§6. L'anello delle funzioni di Kronecker nel contesto generale

Il problema della costruzione di un anello delle funzioni di Kronecker per un dominio qualunque è stato considerato indipendentemente da F. Halter-Koch (2003) e Fontana-Loper (2001, 2003).

L'approccio di Halter-Koch è assiomatico e fa uso della teoria dei sistemi moltiplicativi finitari di ideali. H-K stabilisce una relazione tra la sua teoria e la teoria di Krull degli anelli di funzioni di Kronecker.

L'approccio seguito da Fontana-Loper si basa sulla teoria delle operazioni semistar e permette di costruire l'anello delle funzioni di Kronecker in una situazione del tutto generale (cioè, anche nel caso di domini non integralmente chiusi ed operazioni non necessariamente `e.a.b.`).

Halter-Koch ha dato la seguente definizione "astratta":

Sia K un campo, R un sottoanello di $K(X)$ e $D := R \cap K$. Se
(Kr.1) X e X^{-1} appartengono ad R;
(Kr.2) Per ogni $f \in K[X]$, $f(0) \in fR$; allora R viene chiamato *un anello di K–funzioni di D*.

Usando soltanto questi due assiomi, H-K ha dimostrato che R si comporta come un "anello di funzioni di Kronecker classico":

Teorema 3

Sia R un anello di K–funzioni di $D = R \cap K$, allora:

(1) *R è un dominio di Bézout con campo dei quozienti $K(X)$.*

(2) *D è integralmente chiuso in K.*

(3) *Per ogni $f := a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in K[X]$, si ha $(a_0, a_1, \ldots, a_n)R = fR$.*

Esempi

(1) Se V è un anello di valutazione di K, allora $V(X)$ è un anello di K–funzioni.

(2) Ogni intersezione di anelli di K-funzioni è un anello di K-funzioni.

(3) Sia $K_0 \subset K$ un'estensione di campi, con K *non algebrico* su K_0. Allora:

$$R := \bigcap \{V(X) \mid K_0 \subseteq V \subseteq K, V \text{ anello di valutazione di } K\}$$

è un anello di K–funzioni che non può essere ottenuto in nessun modo con anello di funzioni di Kronecker (nel senso di Krull), infatti $R \cap K = \overline{K_0}^K$.

Sia $\star$ una qualunque operazione semistar definita su un qualunque dominio D. Allora, abbiamo introdotto *l'anello delle funzioni di Kronecker di D rispetto a* $\star$ ponendo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Kr}(D,\star) := \{f/g \mid \ & f, g \in D[X],\ g \neq 0,\ \text{ ed esiste} \\ & 0 \neq h \in D[X] \text{ con } (\mathbf{c}(f)\mathbf{c}(h))^\star \subseteq (\mathbf{c}(g)\mathbf{c}(h))^\star\}.\end{aligned}$$

A questo punto, ho bisogno di alcuni preliminari

- per mostrare che questa costruzione conduce ad un'estensione effettiva dell'anello "classico" delle funzioni di Kronecker;
- per descrivere i legami tra $\mathrm{Kr}(D,\star)$ e l'anello di Halter-Koch delle K–funzioni;
- per mostrare che $\mathrm{Kr}(D,\star)$ determina naturalmente una "nuova" operazione semistar su D, $\star_a$, che si comporta rispetto a $\mathrm{Kr}(D,\star)$ come l'operazione $\widetilde{\star}$ si comporta rispetto a $\mathrm{Na}(D,\star)$.

Ad ogni operazione semistar può essere associata un'operazione semistar `e.a.b.` di tipo finito $\star_a$ su D, chiamata *la operazione semistar e.a.b. associata a* $\star$, e definita come segue, presi comunque $F \in \boldsymbol{f}(D)$ e $E \in \overline{\boldsymbol{\mathfrak{F}}}(D)$:

$$F^{\star_a} := \bigcup\{((FH)^\star : H^\star) \mid H \in \boldsymbol{f}(D)\}\,,$$
$$E^{\star_a} := \bigcup\{F^{\star_a} \mid F \subseteq E\,,\ F \in \boldsymbol{f}(D)\}\,.$$

La costruzione precedente si può far risalire a P. Lorenzen (1939) anche se è stata poi sviluppata da P. Jaffard (1960), F. Halter-Koch (1997, 1998). E' utile notare che:

- *Quando $\star = \star_f$, allora $\star$ è e.a.b. se e soltanto se $\star = \star_a$.*
- *$D^{\star_a}$ è integralmente chiuso e contiene la chiusura integrale di D in K.*
- *Quando $\star = v$, D^{v_a} coincide con* la chiusura integrale regolare di *D considerata da Dieudonné (1941) e con* la pseudo-chiusura integrale *di D.F. Anderson-Houston-Zafrullah (1992).*

Un'altra nozione importante in questo contesto è quella di sopraanello di $\star$-valutazione (P. Jaffard (1960), Halter-Koch (1997)).

Si dice che un sopraanello di valutazione V di D è un *anello di $\star$-valutazione di D* se $F^\star \subseteq FV$ (o, equivalentemente, $F^\star V = FV$) per ogni $F \in \mathbf{f}(D)$.

Teorema 4

Sia $\star$ un'operazione semistar su un dominio D con campo dei quozienti K. Allora:

(1) *L'applicazione $W \mapsto W \cap K$ stabilisce una biiezione tra l'insieme di tutti i sopraanelli di valutazione di $\mathrm{Kr}(D, \star)$ e l'insieme dei sopraanelli di $\star$–valutazione di D.*

(2) $\mathrm{Kr}(D, \star) = \mathrm{Kr}(D, \star_f) = \mathrm{Kr}(D, \star_a) = \bigcap\{V(X) \mid V$ *è un sopra-anello di $\star$–valutazione di $D\}$ è un dominio di Bézout con campo dei quozienti $K(X)$.*

(3) $E^{\star_a} = E\mathrm{Kr}(D, \star) \cap K = \bigcap\{EV \mid V$ *è un sopraanello di $\star$–valutazione di $D\}$ per ogni $E \in \overline{\mathfrak{F}}(D)$.*

(4) $R := \mathrm{Kr}(D, \star)$ *è un anello di K–funzioni (nel senso di Halter-Koch) di $D^{\star_a} = R \cap K$.*

§7. Alcune relazioni tra $\mathrm{Na}(D,\star)$, $\mathrm{Kr}(D,\star)$, $\widetilde{\star}$, e $\star_a$

Un primo problema naturale è quella di studiare le possibili relazioni tra le operazioni $\tilde{\star}$ e $\star_a$.

Strettamente legato a questo è il problema dei rapporti tra i sopraanelli di $\tilde{\star}$–valutazione di D e quelli di $\star_a$–valutazione (o, equivalenemente, quelli di $\star$–valutazione) di D.

Non è troppo difficile mostrare che *gli anelli di $\star_a$–valutazione sono sempre anche di $\tilde{\star}$–valutazione*.
Ma, in generale, queste due famiglie sono molto frequentemente distinte (vari esempi sono stati costruiti esplicitamente in un lavoro in collaborazione con K.A. Loper(2003)).

Mi limito qui a ricordare un risultato che fornisce una risposta positiva al problema e che generalizza il teorema fondamentale che è alla base della teoria di Krull degli anelli di funzioni di Kronecker.

Caso: $\widetilde{d} = d_a$ (dove d è l'operazione star identità)

$$\begin{aligned} \mathrm{Na}(D) := \mathrm{Na}(D, d) = \mathrm{Kr}(D, b) =: \mathrm{Kr}(D) &\Leftrightarrow D \text{ è un dominio di Prüfer} \\ &\Leftrightarrow d = \widetilde{d} = d_a = b\,. \end{aligned}$$

Diamo ora la seguente definizione che estende la nozione di dominio di Prüfer nel contesto delle operazioni semistar.

Un *dominio di Prüfer $\star$–moltiplicativo* (in breve, un *P$\star$MD*) è un dominio tale che, per ogni $F \in \mathbf{f}(D)$, $(FF^{-1})^{\star_f} = D^{\star_f}$ $(= D^\star)$ (i.e., ogni F è *$\star_f$–invertibile*).

Alcuni punti del seguente teorema generalizzano alcune delle caratterizzazioni "classiche" dei domini di Prüfer v-moltiplicativi (in breve, PvMD) (cfr. Griffin (1967), Arnold-Brewer (1971), Mott-Zafrullah (1981), Zafrullah (1984) e Kang (1989)).

Teorema 5 (Fontana-Jara-Santos, 2003)

Sia D un dominio e $\star$ un'operazione semistar su D. Le seguenti proprietà sono equivalenti.

(i) *D è un P$\star$MD.*

(ii) $\mathrm{Na}(D, \star)$ *è un dominio di Prüfer.*

(iii) $\mathrm{Na}(D, \star) = \mathrm{Kr}(D, \star)$.

(iv) $\tilde{\star} = \star_a$.

In particolare, D è un P$\star$MD se e soltanto se è un P$\tilde{\star}$MD.

§8. Intersezioni di anelli locali di Nagata, $\mathrm{Na}(D,\star)$ e $\mathrm{Kr}(D,\star)$

Abbiamo visto che, data un'operazione semistar $\star$ su un dominio D, i domini $\mathrm{Na}(D,\star)$ e $\mathrm{Kr}(D,\star)$ (e le loro operazioni relative associate $\tilde{\star}$ e $\star_a$) hanno un comportamento per molti aspetti simile.
In un lavoro in collaborazione con K.A. Loper (2007) abbiamo affrontato e risolto positivamente i seguenti problemi.

E' possibile determinare un anello di funzioni razionali di "nuovo tipo", che abbiamo denotato con $\mathrm{KN}(D,\star)$,(ottenuto come intersezione di anelli di Nagata locali canonicamente associati ad un'operazione $\star$ assegnata) in modo tale che

- $\mathrm{Na}(D,\star) \subseteq \mathrm{KN}(D,\star) \subseteq \mathrm{Kr}(D,\star)$;
- $\mathrm{KN}(D,\star)$ "generalizza" allo stesso tempo $\mathrm{Na}(D,\star)$ e $\mathrm{Kr}(D,\star)$ e coincide con $\mathrm{Na}(D,\star) = \mathrm{Na}(D,\tilde{\star})$ or $\mathrm{Kr}(D,\star) = \mathrm{Kr}(D,\star_a)$, quando l'operazione $\star$ (di tipo finito) assume i "valori estremi" dell'intervallo $\tilde{\star} \leq \star \leq \star_a$

§9. Rappresentazioni di un dominio integralmente chiuso

Sia K un campo ed R un sottoanello di K.

Lo spazio:

$$\mathrm{Zar}(K|R) := \{V \mid R \subseteq V \subseteq K = \mathrm{Qf}(V),\, V \text{ di valutazione}\}$$

dotato di un'opportuna topologia (che richiameremo tra poco) viene chiamato da Zariski *superficie di Riemann astratta di K su R*.

Sia $\Sigma \subseteq \mathrm{Zar}(K|R)$, se $D := \bigcap\{V \mid V \in \Sigma\}$, allora Σ si dice *una rappresentazione di D*.

E' ben noto che *un dominio D ammette una rappresentazione se e soltanto se è integralmente chiuso* (Teorema di W. Krull).

Se D è integralmente chiuso, ad ogni sua rappresentazione Σ si può associare una operazione star e.a.b., $\wedge_\Sigma$, ponendo per ogni $I \in \mathfrak{F}(D)$

$$I \mapsto I^{\wedge_\Sigma} := \bigcap\{IV \mid V \in \Sigma\}$$

La *b-operazione su D* coincide con l'operazione $\wedge_\Sigma$ con $\Sigma = \mathrm{Zar}(K|D)$.

Per un dominio integralmente chiuso D sussistono corrispondenze naturali tra le rappresentazioni, le operazioni star e.a.b. e gli anelli di funzioni di Kronecker

- Ad una una rappresentazione Σ di D può essere associata

(1) l'operazione star e.a.b. $\wedge_\Sigma$ su D e, ad essa, può essere associato

(2) l'anello di funzioni di Kronecker $\mathrm{Kr}(D, \wedge_\Sigma) = \bigcap\{V(X) \mid V \in \Sigma\}$.

Viceversa:

- Dato $S = \bigcap\{W \mid W \in \mathrm{Zar}(K(X)|S)\}$ un anello di funzioni di Kronecker di $D := S \cap K$, allora ad esso può essere associata

(1') una rappresentazione $\Sigma := \Sigma(S) := \{W \cap K \mid W \in \mathrm{Zar}(K(X)|S)\}$ di D e, a questa, può essere associata

(2') l'operazione star e.a.b. $\wedge_\Sigma$ su D, la quale è tale che $S = \mathrm{Kr}(D, \wedge_\Sigma)$.

Sia Σ una rappresentazione di D, allora Σ si dice *una rappresentazione non ridondante di D* se, per ogni $W \in \Sigma$:

$$D \subsetneq \bigcap \{ V \in \Sigma \mid V \neq W \} .$$

Non tutti i domini integralmente chiusi ammettono rappresentazioni non ridondanti.

Inoltre, se una rappresentazione non ridondante esiste può non essere unica.

Domini di Krull

Un dominio di Krull ammette sempre una rappresentazione non ridondante, data dalla sua famiglia di definizione.

Domini di Prüfer

Se un dominio di Prüfer D ammette una rappresentazione non ridondante allora questa è unica (ed è data da $D = \bigcap \{ D_M \mid M \in \mathcal{T} \}$, dove $\mathcal{T} := \{ M \in \mathrm{Max}(D) \mid$ esiste un ideale finitamente generato tale che M è l'unico ideale massimale che lo contiene$\}$) (Gilmer-Heinzer (1968)).

Nel caso di un dominio integralmente chiuso arbitrario D esiste una grande varietà di possibilità, tuttavia da una serie di lavori di R. Gilmer e W. Heinzer si deducono le seguenti proprietà.

Sia D un dominio integralmente chiuso:

(1) Se D ha una rappresentazione non ridondante Σ, allora $\mathrm{Kr}(D, \wedge_\Sigma)$, ha una rappresentazione non ridondante.

(2) Se S è un anello di funzioni di Kronecker massimale di D ed S ha una rappresentazione non ridondante, allora D ha anch'esso una rappresentazione non ridondante.

Una parte significativa della tesi di A. Fabbri (Roma Tre, 2010) è dedicata allo studio di tali problematiche nel caso in cui D ammetta un unico anello di funzioni di Kronecker (domini vacanti). In tal caso, (da (1) e (2)) si ha che D ha una rappresentazione non ridondante se e soltanto se $\mathrm{Kr}(D, b)$ ha una rappresentazione non ridondante.

§10. $\mathrm{Zar}(K|R)$ è uno spazio spettrale nel senso di Hochster

Sia R un sottoanello di un campo K. O. Zariski ha dotato lo spazio $\mathrm{Zar}(K|R) := \{V \mid R \subseteq V \subseteq K = \mathrm{Qf}(V),\ V \text{ di valutazione}\}$ di una topologia, prendendo, come base degli aperti, i sottospazi:

$$E_A := \{V \in \mathrm{Zar}(K|R) \mid V \supseteq A\} = \mathrm{Zar}(K|A)$$

al variare di A tra le R–sottoalgebre di tipo finito di K.

Nello studio di $\mathrm{Zar}(K|R)$ non è ovviamente restrittivo supporre che R sia integralmente chiuso in K.
E' immediato che l'applicazione naturale $\gamma : \mathrm{Zar}(K|R) \to \mathrm{Spec}(R)$ che associa ad un anello di valutazione $V \in \mathrm{Zar}(K|R)$, con ideale massimale M_V, il suo centro $M_V \cap R$ in R è suriettiva.

Utilizzando ora l'anello delle funzioni di Kronecker e le sue proprietà, siamo in grado di enunciare un teorema che mostra che lo spazio $\mathrm{Zar}(K|R)$ è uno spazio spettrale, non solo in forma teorica, cioè mostrando che tutte le proprietà date da M. Hochster (1969) a loro caratterizzazione sono soddisfatte, ma dando in modo esplicito l'anello che tramite il suo spettro primo lo realizza.

Teorema 6

Con le notazioni sopra introdotte, sia R un dominio con campo dei quozienti K e sia $\mathrm{Kr}(R, b)$ l'anello delle funzioni di Kronecker rispetto all'operazione $b = \wedge_{\mathrm{Zar}(K|R)}$. Allora, le applicazioni canoniche:

$$\mathrm{Zar}(K(X)|\mathrm{Kr}(R, b)) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(R, b)) \to \mathrm{Zar}(K|R)$$

sono omeomorfismi (tra spazi topologici, dotati delle loro rispettive topologie di Zariski)

Questo risultato è stato esteso recentemente anche al caso in cui R è un sottocampo di K, nel qual caso l'anello $\mathrm{Kr}(R, b)$ deve essere sostituito con l'anello di K–funzioni di Halter-Koch $S := \bigcap\{V(X) \mid V \in \mathrm{Zar}(K|R)\}$. (Cfr. Dobbs-Fedder-Fontana (1987), Dobbs-Fontana (1986), Halter-Koch (2003), Heubo (2009), Finocchiaro-Fontana-Loper (2010).)

Nella tesi di C. Finocchiaro (U. Roma Tre) si dimostra che lo studio di rappresentazioni distinte di domini integralmente chiusi è strettamente legato a proprietà topologiche di $\mathrm{Zar}(K|R)$. Tuttavia, per questo scopo, la topologia di Zariski non è sufficientemente "fina".

Ricordo che, su un qualunque spazio spettrale, è possibile definire una topologia detta "costruibile" (più fine della topologia di Zariski), prendendo come sottobase per i chiusi sia gli aperti quasi-compatti che i chiusi della topologia di Zariski. Questa topologia è la meno fina per la quale gli aperti quasi-compatti (di Zariski) sono –allo stesso tempo– aperti e chiusi. Un primo risultato è il seguente.

Lemma 7

Siano Σ' e Σ'' due sottoinsiemi di $Z := \mathrm{Zar}(K|R)$.
Se $\mathcal{Cl}^{const}(\Sigma') = \mathcal{Cl}^{const}(\Sigma'')$ allora $\bigcap\{V' \mid V' \in \Sigma'\} = \bigcap\{V'' \mid V'' \in \Sigma''\}$.
In particolare, per ogni sottoinsieme Σ di Z,

$$\bigcap\{V \mid V \in \Sigma\} = \bigcap\{W \mid W \in \mathcal{Cl}^{const}(\Sigma)\}.$$

Nello studio intrapreso per invertire il precedente lemma, si scopre che la condizione topologica determina un'uguaglianza non soltanto di rappresentazioni di uno stesso dominio integralmente chiuso D (sopranello di R) ma un'uguaglianza tra operazioni semistar su R. Precisamente, Finocchiaro, tra l'altro, ha dimostrato il seguente:

Teorema 8

(1) *Data un'operazione semistar $\star$ su un dominio R, con campo dei quozienti K. Allora, $\star$ è un'operazione* e.a.b. *di tipo finito se e soltanto se esiste un sottospazio compatto Σ di $\mathrm{Zar}(K|R)^{const}$ tale che $\star = \wedge_\Sigma$.*

(2) *Sia Σ un sottoinsieme di $\mathrm{Zar}(K|R)$ e sia $\widehat{\Sigma} := \mathcal{Cl}^{const}(\Sigma)^{\uparrow}$. Allora,*

$$(\wedge_\Sigma)_f = \wedge_{\mathcal{Cl}^{const}(\Sigma)} = \wedge_{\widehat{\Sigma}} = \wedge_{\mathcal{Cl}^{inv}(\Sigma)}$$

(dove la topologia "inversa" (o, "duale") è stata introdotta da M. Hochster (1969) ed è quella topologia che ha come base per i chiusi i sottospazi aperti quasi-compatti).

Roma, Garbatella - San Paolo (Fontana Carlotta)

... grazie per l'attenzione