Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.
Vol. XXII, 49-94 (1976)

Arithmétique fonctorielle des topologies de Grothendieck.

MARCO FONTANA (*) - GUERINO MAZZOLA (**) (***)

Introduction.

Dans [AF], ont été introduits et étudiés les systèmes relationnels (SR, tout court), qui sont essentiellement des sous-bi-foncteurs du foncteur Hom, plus une catégorie pour support. La puissance de la notion de « système relationnel » est mise en évidence, par exemple, en notant que, soit la théorie des relations [PM], étendue aux catégories (cf. par exemple [2]), soit la théorie des cribles [SGA IV] de Verdier en sont des réalisations naturelles. En effet, un crible peut être interprété — grosso modo — comme un SR dont on a fixé la seconde variable; en d'autres mots, un SR peut se voir comme « famille de cribles paramétrisés par une catégorie », ce qui revient à enlever l'*asymétrie intrinsèque* de variance fonctorielle dans un crible.

Or, vu que les topologies de Grothendieck-Verdier [SGA IV] sont définies à travers le concept du crible, il a été facile de reformuler ces topologies en termes de SR (II.1). A ce niveau, on s'aperçoit du germe d'une théorie plus générale et telle que la limitation a priori aux topologies de Grothendieck serait tout à fait *artificielle*. En effet, on construit des exemples « raisonnables » (même dans la catégorie des schémas (II.3)) sortant du cadre des topologies de Grothendieck; en outre, de nouvelles structures de type topologique à caractère « local », appelées *Sites tangents* (II.10), s'introduisent, de façon naturelle, à partir d'une topologie de Grothendieck.

Une des idées de base concernant les topologies de Grothendieck est de remplacer les recouvrements d'espaces topologiques, déduits d'immersions ouvertes, par des familles couvrantes de morphismes de type donné, ces

---

(*) Financé par *Il Consiglio Nazionale delle Ricerche*.

(**) Financé par *Kredit zur Förderung des akademischen Nachwuchses, Erziehungsdirektion des Kt. Zürich*.

(***) Indirizzo degli autori: Marco Fontana, Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », Università di Roma, Città Universitaria, Roma, Guerino Mazzola, Mathematisches Institut der Universität, Zürich.

derniers n'étant plus nécessairement injectifs. Or, dans la traduction d'une topologie de Grothendieck dans le langage des SR, intervient de façon canonique un foncteur injectif (II.1.1). La première généralisation qui s'impose est de reprendre les propriétés essentielles de cette situation de manière axiomatique, en laissant tomber, entre autre, l'injectivité dudit foncteur. Cela est le point de départ pour une théorie topologique substantiellement plus élastique.

Un deuxième passage est nécessité pour développer une théorie efficace de faisceaux généraux. A cet effet, sont introduits des foncteurs en ensembles de type pro-représentable (II.4), fibrés sur des foncteurs fondamentaux (ces derniers étant obtenus en utilisant un procédé à la Yoneda), afin de remplacer les cribles qui sont fibrés intrinsèquement à travers une injection dans un foncteur représentable. Ainsi, une topologie généralisée, appelée Topologie de Grothendieck-Yoneda, est construite, ayant entre autre l'avantage de produire localement des Topologies tangentes (II.10).

Le langage des SR se montre *définitivement* indispensable pour une étude arithmétique des Topologies dans le sens de l'arithmétique fonctorielle des SR [AF], thème qui sera esquissé au chapitre III du présent travail, et dont la motivation se fonde a priori sur l'intérêt de produire de nouvelles Topologies, soit globales, soit locales, voire tangentes, moyennant des opérations de nature arithmétique.

Plus précisément, à tout endofoncteur $\boldsymbol{v}$ égal — en gros — à son carré, on attache une classe $\boldsymbol{v}$-Top de $\boldsymbol{v}$-Topologies de Grothendieck-Yoneda. Dans la théorie additive (III.1), on montre que $\boldsymbol{v}$-Top porte une structure de semi-groupe abélien, ordonné, dans lequel la Topologie discrète $\boldsymbol{dis}$ est absorbante. La Topologie chaotique $\boldsymbol{ch}$ y joue un rôle essentiel: d'abord, la somme des Topologies est déterminée par translation avec la Topologie $\boldsymbol{ch}$ (III.1.3); en plus, si T est un espace topologique, et si $\boldsymbol{t}$ est la Topologie qu'on lui associe canoniquement (II.9.8 (i)), alors T est noethérien si, et seulement si, $\boldsymbol{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{ch}$ (III.1.11).

Quant à la théorie multiplicative (III.2), on voit que $\boldsymbol{v}$-Top porte la structure d'un « band » [4], ou mieux, d'un monoïd abélien, idempotent. En plus, ce produit coïncide avec la borne supérieure de Topologies (III.2.3), d'où l'on tire que $\boldsymbol{dis}$ est absorbant et que $\boldsymbol{ch}$ est l'élément neutre.

D'ailleurs, en passant, on montrera que l'arithmétique des Cribles généraux (III.1.1.1), (III.2.1.1), qui est à la base de celle des Topologies, redonne l'arithmétique classique des structures relationnelles [11], et, en particulier, celle des algèbres universelles [6], (II.2.3).

Pour des informations plus détaillées sur le contenu de ce travail, on se reportera aux introductions de chaque chapitre.

Dans un papier ultérieur, nous avons en vue de développer une théorie fonctorielle des Topologies, à savoir l'étude du lien des Topologies tangentes entre elles et le passage « local-global ». En effet, il est fort possible qu'une étude locale des Topologies tangentes puisse donner des propriétés illuminatives ou même caractéristiques de la Topologie dont elles sont déduites.

Remarque préliminaire.

Pour éviter des ennuis de nature logique, nous placerons toutes les catégories intervenant dans cet article dans un Univers de Grothendieck ([SGA IV, Exp. I]), que nous supposons « assez grand » pour pouvoir y effectuer toutes les opérations nécessaires: nous laissons au lecteur soucieux le soin de préciser « la taille » des catégories considérées; de toute façon les informations nécessaires découleront directement du contexte (*). (L'omission de précautions du type précédent pourrait éventuellement fournir de nouvelles antinomies, fait qui ne serait point inutile ...).

CHAPITRE I

QUELQUES CONSTRUCTIONS EN THÉORIE DES SYSTÈMES RELATIONNELS

(I.0) Introduction au chapitre.

Dans ce chapitre préliminaire, on donne des constructions fondamentales telles que la *somme orientée* des catégories (I.1.1) et les structures déduites à partir d'un *projecteur* (I.1.4). A ce propos, un nouveau procédé de plongement d'une catégorie dans une catégorie de foncteurs est traité.

En outre, on démontre l'existence d'un isomorphisme de la catégorie des cribles (dans une catégorie $\mathcal{U}$ fixée) sur la sous-catégorie de $\underrightarrow{\mathcal{U}^{\star}\text{-SR}}$ locaux, $\mathcal{U}$-$\dot{\mathcal{U}}$-orientés (I.3.8), fait qui permet d'utiliser indifféremment le langage des SR ou celui des cribles [SGA IV].

(I.1) La somme orientée.

(I.1.1) Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-catégories d'une catégorie $\mathcal{C}$. La *somme orientée* $\mathcal{W} = \mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg}^{\mathcal{C}} \mathcal{V}$ (ou $\mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg} \mathcal{V}$, si aucune confusion n'a lieu) est la caté-

(*) Pour une autre façon d'éviter les difficultés logiques, on pourra consulter [9].

gorie suivante:

(i) $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{U} \amalg \mathcal{V})$; nous écrivons $\dot{V}$ (resp. $\dot{f}\colon \dot{X} \to \dot{Y}$) au lieu de V (resp. $f\colon X \to Y$), pour tout objet V (resp. morphisme f) de $\mathcal{V}$, quand il est pensé dans $\mathcal{W}$, aussi bien que $\dot{\mathcal{V}}$ au lieu de $\mathcal{V}$, pensé dans $\mathcal{W}$.

(ii) On a quatre cas pour les morphismes:

a) $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y)$

b) $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y)$

c) $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(X, \dot{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

d) $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(\dot{X}, Y) = \emptyset$.

(I.1.2) *Exemples et notations.*

(*a*) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ iet $\mathcal{U}$ une sous-catégorie de $\mathcal{V}$. Alors (I.1.1) fournit la méthode pour se débarasser d'une sous-classe de morphismes dans $\mathcal{C}$, en considérant $\mathcal{U} \underset{\to}{\amalg} (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U})$ (*), où sont « oubliés » les morphismes de domaine dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{V} \setminus \mathcal{U})$ et de codomaine dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$.

(*b*) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{U} = \mathcal{V}$; $\mathcal{U} \underset{\to}{\amalg} \mathcal{U}$ est noté $\underset{\to}{\mathcal{U}}$. L'endofoncteur de $\underset{\to}{\mathcal{U}}$ défini par $X \mapsto \dot{X}$ et par $(\dot{X})^{\bullet} = \dot{X}$ est noté $\dot{\boldsymbol{u}}$.

(*c*) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{U}$ et $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$ (**). On pose $\underset{\to}{\mathcal{U}}^{\star} = \mathcal{U} \underset{\to}{\amalg} \mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$.

(*d*) Si $\mathcal{C} = \mathcal{U}$ et $\mathcal{V} = \{X\}^{\mathrm{Ob}} \subset \mathcal{U}$, alors on pose $\mathcal{U}_{\dot{X}} = \mathcal{U} \underset{\to}{\amalg} \{X\}^{\mathrm{Ob}}$, *catégorie* appelée *localisée de* $\mathcal{U}$ *en* X. Evidemment, si $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, alors $(\mathcal{U}_{\dot{X}})_{\dot{Y}} \cong (\mathcal{U}_{\dot{Y}})_{\dot{X}}$. Donc, pour toute sous-catégorie $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$ finie, i.e. $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{Ob}}$, en posant $\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{F}}} = (\ldots (\mathcal{U}_{\dot{X}_1})_{\dot{X}_2} \ldots)_{\dot{X}_n}$, $\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{F}}}$ est bien définie et égale à $\mathcal{U} \underset{\to}{\amalg} \mathcal{F}$. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$ sont deux sous-catégories finies de $\mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$, alors on a un diagramme canonique commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{F}}} \arrow[rr, hook] & & \underset{\to}{\mathcal{U}}^{\star} \\
& \mathcal{U}_{\dot{\mathcal{G}}} \arrow[ul] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

et on peut donc dire que $\underset{\to}{\mathcal{U}}^{\star}$ s'identifie à l'ind-catégorie des $\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{F}}}$, $\mathcal{F}$ étant finie dans $\mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$.

(*) $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ induite sur $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}) \setminus \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$.

(**) $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ et les morphismes de $\mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$ sont seulement les morphismes identiques de $\mathcal{U}$.

(*e*) Plus généralement, si $\mathcal{V}$ est une sous-catégorie quelconque de $\mathcal{U}^{\mathrm{Ob}}$, on notera $\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{V}}} = \mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg} \mathcal{V}$.

(*f*) Etant donnée une catégorie $\mathcal{U}$, posons $\mathcal{C} = \mathcal{V} = [\mathcal{U}^{\mathrm{Op}}, \mathrm{Ens}]$. Par le lemme de Yoneda, $\mathcal{U}$ s'identifie canoniquement à une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. Notons alors $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg} [\mathcal{U}^{\mathrm{Op}}, \mathrm{Ens}]$.

(I.1.3) Dans la situation de (I.1.1), on a un foncteur canonique $\chi\colon \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow [\mathcal{C}^{\mathrm{Op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\mathrm{res}} [\mathcal{U}^{\mathrm{Op}}, \mathrm{Ens}]$ qui donne, de façon évidente, un foncteur $\boldsymbol{H} = \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \underset{\rightarrow}{\amalg} \chi\colon \mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg} \mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{U}}$.

On dit que *le triple* $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{C})$ (*ou* $\boldsymbol{H}$ si nulle confusion n'en résulte) *est de Yoneda* si le foncteur $\boldsymbol{H}$ est pleinement fidèle; terminologie justifiée par le fait que le triple $(\mathcal{U}, \mathcal{U}, \mathcal{U})$ est toujours de Yoneda (lemme de Yoneda).

(I.1.4) (i) Soient $\mathcal{U}$ une catégorie dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Si on note par $\mathcal{W}$ la catégorie $\mathcal{U} \underset{\rightarrow}{\amalg} \mathcal{V}$, on a un endofoncteur de $\mathcal{W}$

$$\dot{\boldsymbol{v}}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$$

défini par $\dot{\boldsymbol{v}}|_{\mathcal{U}}(X) = \dot{X}$, $\dot{\boldsymbol{v}}|_{\dot{\mathcal{V}}}(\dot{Y}) = \dot{Y}$.

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, on a un morphisme canonique $\eta_X\colon X \to \dot{X}$ dans $\mathcal{W}$, celui qui est associé à $\mathbf{1}_X$.

Le foncteur $\dot{\boldsymbol{v}}$ a donc les deux propriétés suivantes:

(I.1.4.1) $$\dot{\boldsymbol{v}}|_{\mathrm{Im.pl}(\dot{\boldsymbol{v}})} = \mathbf{1}_{\mathrm{Im.pl}(\dot{\boldsymbol{v}})} \;(*)$$

(I.1.4.2.) il existe une transformation naturelle $\eta\colon \mathbf{1}_{\mathcal{W}} \to \dot{\boldsymbol{v}}$.

Un endofoncteur d'une catégorie quelconque $\mathcal{W}$ ayant les propriétés (I.1.4.1) et (I.1.4.2) est dit *projecteur*. Si, en outre, pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{W})$, η_X est un épimorphisme de $\mathcal{W}$, le projecteur est dit *projecteur strict*. Par exemple, l'endofoncteur $\dot{\boldsymbol{u}}$ défini dans (I.1.2 (*b*)) est un projecteur strict.

(ii) Dans la situation de (I.1.1), soit $\mathcal{V}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Supposons donné un foncteur $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Im}(f|_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{V}$ et $f|_{\mathcal{V}} \subset \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$: Alors, nous pouvons en déduire un foncteur $\dot{f}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ défini par $\dot{f}|_{\mathcal{U}} = \dot{\boldsymbol{v}} \circ f$ et $\dot{f}|_{\dot{\mathcal{V}}}(\dot{Y}) = \dot{\boldsymbol{v}}(f(Y)) = \dot{Y}$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$. Si f est un projecteur (strict), il en est de même de $\dot{f}$.

(iii) Si $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un projecteur (strict), notons par

$\mathcal{V}(\boldsymbol{v})$, ou simplement $\mathcal{V}$, la catégorie $\mathrm{Im.pl}(\boldsymbol{v})$;

$\mathcal{U}(\boldsymbol{v})$, ou $\mathcal{U}$, la catégorie $\mathcal{C} \setminus \mathcal{V}$;

(*) Pour tout foncteur $t\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, nous notons par $\mathrm{Im.pl}(t)$ la restriction $\mathcal{B}|_{t(\mathrm{Ob}(\mathcal{A}))}$.

$\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$, ou $\mathcal{O}$, la catégorie $\mathcal{U}\underset{\rightarrow}{\amalg}\mathcal{V}$ appelée *catégorie orientée par le projecteur* $\boldsymbol{v}$;

$\mathcal{O}^{\star}(\boldsymbol{v})$, ou $\mathcal{O}^{\star}$, la catégorie $\mathcal{U}\underset{\rightarrow}{\amalg}\mathcal{V}^{\mathrm{Ob}}$;

$\mathcal{U}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$, ou $\mathcal{U}^{\wedge}$, la catégorie $[(\mathcal{U}(\boldsymbol{v}))^{\mathrm{Ob}}, \mathrm{Ens}]$;

$\mathcal{O}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$, ou $\mathcal{O}^{\wedge}$, la catégorie $\mathcal{U}(\boldsymbol{v})\underset{\rightarrow}{\amalg}[(\mathcal{U}(\boldsymbol{v}))^{\mathrm{Op}}, \mathrm{Ens}]$;

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v})$, ou $\boldsymbol{H}$, le foncteur $\mathcal{O}\to\mathcal{O}^{\wedge}$ défini dans (I.1.3);

$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{v})$ ou $\boldsymbol{H}'$, le foncteur $\boldsymbol{H}|_{\dot{\mathcal{V}}}\colon \mathcal{V}\to\mathcal{U}^{\wedge}$.

Du projecteur $\boldsymbol{v}$, nous déduisons, comme dans (I.1.4) un projecteur $\dot{\boldsymbol{v}}\colon \mathcal{O}(\boldsymbol{v})\to\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$.

Remarquons que $\mathcal{O}(\dot{\boldsymbol{v}})\cong\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ et que $(\dot{\boldsymbol{v}})^{\bullet}=\dot{\boldsymbol{v}}$. Nous noterons par $\dot{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})$, ou simplement $\dot{\boldsymbol{w}}$, le foncteur $\dot{\boldsymbol{v}}|_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U}(\boldsymbol{v})\to(\mathcal{V}(\boldsymbol{v}))^{\bullet}$.

(iv) Un autre exemple fondamental de projecteur est traité dans (II.4).

(I.1.5) PROPOSITION. *Supposons donné un projecteur* $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$. *Avec les notations de* (I.1.4 (iii)), *s'il existe un foncteur* $\boldsymbol{T}\colon \mathcal{V}\to\mathcal{U}$ *tel que* $\boldsymbol{T}\circ\dot{\boldsymbol{w}}\cong\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$, *alors le foncteur* $\boldsymbol{H}\colon \mathcal{O}\to\mathcal{O}^{\wedge}$ *est de Yoneda* (I.1.3).

Par définition, il faut voir que $\boldsymbol{H}$ est pleinement fidèle. Mais ceci est trivial sauf pour les couples $\dot{X}, \dot{Y}\in\mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$. Pour terminer, il suffit de voir que:

$$\boldsymbol{H}(\dot{X}, \dot{Y})\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\dot{X}, \dot{Y})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\wedge}}(h_X|_{\mathcal{U}}, h_Y|_{\mathcal{U}})$$

(h_X étant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$) a une application inverse fonctorielle en X et Y.

Soit $\varphi\colon h_X|_{\mathcal{U}} - h_Y|_{\mathcal{U}}$ une transformation naturelle; il suffit évidemment de construire une transformation naturelle $\Phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(-, X)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(-, Y)$ pour déterminer un $\mathcal{O}$-morphisme $\varphi'\colon \dot{X}\to\dot{Y}$. Pour cela, soit $Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ et $t\colon Z\to X$ un $\mathcal{V}$-morphisme. Posons.

$$\Phi_Z(t)=\dot{\boldsymbol{w}}\big(\varphi_{\boldsymbol{T}(Z)}(\eta_{\boldsymbol{T}(X)}\circ\boldsymbol{T}(t))\big)\,.$$

On vérifie sans peine que Φ est fonctoriel en Z. En outre, on voit que $\varphi\mapsto\varphi'$ est l'application inverse de $\boldsymbol{H}(\dot{X}, \dot{Y})$, d'où la proposition.

(I.1.5.1) REMARQUE. Dans la situation de (I.1.4 (i)), supposons $\mathcal{U}=\mathcal{V}$. Alors, le projecteur $\dot{\boldsymbol{u}}\colon \underset{\rightarrow}{\mathcal{U}}\to\underset{\rightarrow}{\mathcal{U}}$ (I.1.2 (b)) vérifie trivialement l'hypothèse de (I.1.5).

(I.1.6) LEMME. *Avec les notations de* (I.1.4 (iii)), *supposons que les produits fibrés dans* $\mathcal{V}$ *existent. Alors, le foncteur* $\boldsymbol{H}'\colon \dot{\mathcal{V}}\to\hat{\mathcal{U}}$ *commute aux produits fibrés.*

(I.2) Produits fibrés de systèmes relationnels.

(I.2.0) Pour les définitions des systèmes relationnels (= SR) et des morphismes entre de tels objets, ainsi que pour des exemples, nous renvoyons à [AF].

(I.2.1) Soit

$$\begin{tikzcd} & \alpha \arrow[d, "f"] \\ \beta \arrow[r, "g"] & \gamma \end{tikzcd}$$

un diagramme de $\mathcal{U}$ — SR, où f et g sont des morphismes forts. On construit le $(\mathcal{U}\times\mathcal{U})$-SR *produit fibré* $\delta = \alpha\times_\gamma\beta$ en posant

(i) $|\delta| = |\alpha|\times_{|\gamma|}|\beta|$ (*);

(ii) $\vec{\delta}((A, B), (A', B')) = \vec{\alpha}(A, A')\times_{\vec{\gamma}(f(A)f(A'))}\vec{\beta}(B, B')$.

(I.2.2) Si α et β sont deux sous-SR de γ, on écrira $\alpha\cap\beta$ au lieu de $\alpha\times_\gamma\beta$. Si $\gamma'\to\gamma$ est un « changement de base », on a

(I.2.2.1) $$(\alpha\cap\beta)\times_\gamma\gamma' \cong (\alpha\times_\gamma\gamma')\cap(\beta\times_\gamma\gamma') .$$

(I.3) Systèmes relationnels locaux, globaux et Cribles.

(I.3.1) Rappelons ([SGA IV, Exp. I], (4.1) et (4.2.1); [14], (20.1.2)) qu'un crible R dans une catégorie $\mathcal{U}$ est un sous-foncteur d'un foncteur représentable $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X)$. Si $\mathcal{V}$ est une sous-classe de $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, alors une *$\mathcal{V}$-famille de cribes* est par définition une famille de sous-foncteurs $R_X \subset \subset \mathrm{Hom}(-, X)$, pour tout $X\in\mathcal{V}$. Un morphisme $f\colon R\to S$ de cribles $R\subset\mathrm{Hom}(-, X)$ et $S\subset\mathrm{Hom}(-, Y)$ est une transformation naturelle induite par un morphisme $f\colon X\to Y$, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(-\ X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(-{,}f)"] & \mathrm{Hom}(-, Y) \\ R \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, "f"'] & S \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

doit commuter.

(*) *a*) $\mathrm{Ob}\,(|\alpha|\times_{|\gamma|}|\beta|) = \{(A, B)|A\in\mathrm{Ob}\,(|\alpha|),\ B\in\mathrm{Ob}\,(|\beta|) \text{ et } f(A) = g(B)\}$;

b) $\mathrm{Hom}_{|\alpha|\times_{|\gamma|}|\beta|}((A, B), (A', B')) = \mathrm{Hom}_{|\alpha|}(A, A')\times_{\mathrm{Hom}_{|\gamma|}(f(A), f(A'))}\mathrm{Hom}_{|\beta|}(B, B')$.

Notons par $\boldsymbol{cb}(\mathfrak{U})$, ou simplement $\boldsymbol{cb}$, la catégorie des cribles dans la catégorie $\mathfrak{U}$, et par $\boldsymbol{cb}(\mathfrak{U}, X)$, ou $\boldsymbol{cb}(X)$, la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{cb}(\mathfrak{U})$ constituée par les sous-foncteurs de $\mathrm{Hom}(-, X)$.

(I.3.2) Soit α un $\mathfrak{U}$-SR, et soit $\mathfrak{V}$ une sous-catégorie de $(|\alpha|)^{\mathrm{Ob}}$. On construit un $\mathfrak{U}_{\dot{\mathfrak{V}}}$-SR $\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}$ en posant

(i) $|\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}| = |\alpha|_{\dot{\mathfrak{V}}}$,

(ii) $\vec{\alpha}_{\dot{\mathfrak{V}}}(Z, \dot{W}) = \begin{cases} \vec{\alpha}(Z, W), \text{ si } W \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{V}) \text{ et } Z \in \mathrm{Ob}(|\alpha|) \\ \emptyset \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$

$\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}$ sera appelé *le* SR *de* α *localisé en* $\mathfrak{V}$. Evidemment, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{V})$,

(I.3.2.1) $$\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}|_{|\alpha_{\dot{X}}|} = \alpha_{\dot{X}} \quad \big(\text{avec les notations de } (\text{I.1.2 } (d))\big)\,.$$

(I.3.3) Si α est un SR, et si $\mathcal{A}$ et $\dot{\mathcal{B}}$ sont des sous-catégories de $\mathfrak{U}$, on dit que α est $\mathcal{A}$-$\dot{\mathcal{B}}$-*orienté* si $\vec{\alpha}(X, Y) = \emptyset$, sauf — au plus — pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{B}})$, Par exemple, $\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}$ est $|\alpha|$-$\dot{\mathfrak{V}}$-orienté.

(I.3.4) Proposition. *Avec les notations de* (I.1.2 (c)), *soit* $\mathfrak{U}$ *une catégorie. La donnée d'une* $\mathfrak{V}$*-famille de cribles* (I.3.1) *est équivalente à la donnée d'un* $\underrightarrow{\mathfrak{U}^{\star}}$-SR $\mathfrak{U}$-$\dot{\mathfrak{V}}^{\mathrm{Ob}}$*-orienté.*

(I.3.5) Cette proposition justifie la terminologie suivante. On dit qu'un $\underrightarrow{\mathfrak{U}^{\star}}$-SR α est un $\boldsymbol{\dot{u}}$*-Crible*, ou simplement *Crible, de support* $\dot{\mathcal{A}} = \mathrm{Supp}(\alpha)$, $\dot{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{U}^{\mathrm{Ob}}$, si α est

a) $\mathfrak{U}$-$\dot{\mathfrak{U}}$-orienté,

b) $\mathfrak{U} \subset |\alpha|$,

c) $\mathrm{Ob}(|\alpha|) \cap \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{U}}) = \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{A}})$.

Si $\dot{\mathfrak{U}} = \dot{\mathcal{A}}$, α est dit *Crible global*; si $\dot{\mathcal{A}} = \{\dot{X}\}$, α est dit *local en* $\dot{X}$.

(I.3.5.1) Exemples.

(*a*) En particulier, (I.3.4) dit qu'on a une bijection entre les cribles $R \subset \mathrm{Hom}(-, X)$ et les Cribles locaux en $\dot{X}$, définie par $R \mapsto \hat{R}$, où $|\hat{R}| = \mathfrak{U}_{\dot{X}}$ et

$$\vec{\hat{R}}(Z, \dot{Y}) = \begin{cases} R(Z) & \text{si } \dot{Y} = \dot{X}\,, \qquad Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{U})\,, \\ \emptyset & \text{autrement}\,. \end{cases}$$

(*b*) Si α est un SR de $\mathfrak{U}$ tel que $|\alpha| = \mathfrak{U}$ et si $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}^{\mathrm{Ob}}$, alors $\alpha_{\dot{\mathfrak{V}}}$ est un Crible de support $\dot{\mathfrak{V}}$.

(*c*) Pour $\alpha = (\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(-,-))$, on pose $h = \alpha_{\dot{\mathfrak{U}}}$ et $h_{\dot{X}} = h|_{\mathfrak{U}_{\dot{X}}}$, les $h_{\dot{X}}$ étant appelés *Cribles locaux pleins* en $\dot{X}$.

(*d*) Soit α un $\mathfrak{U}$-SR, supposons donné un sous-ensemble $S(X, Y) \subset \subset \vec{\alpha}(X, Y)$, pour tout $X, Y \in \mathrm{Ob}(|\alpha|)$. Ce qu'on entend par *sous-*$\mathfrak{U}$-SR *de* α *engendré par la famille des* $S(X, Y)$ est clair: c'est le plus petit sous-$\mathfrak{U}$-SR σ de α tel que $\vec{\sigma}(X, Y) \supset S(X, Y)$, pour tout $X, Y \subset \mathrm{Ob}(|\alpha|)$. Si α est un $\dot{\mathfrak{u}}$-Crible, les mêmes données permettent de définir de la même façon le $\dot{\mathfrak{u}}$-*Crible engendré par les* $S(X, Y)$.

(I.3.6) *Recollement de systèmes relationnels.*

Pour deux $\mathfrak{U}$-SR α, β, on définit leur *recollement* $\varrho = \alpha \cup \beta$ le long de leur intersection $\gamma = \alpha \cap \beta$. Pour le faire, supposons γ plein dans α et β; alors ϱ est le plus petit $\mathfrak{U}$-SR contenant α et β. Plus précisément:

(i) $\mathrm{Ob}(|\varrho|) = \mathrm{Ob}(|\alpha|) \cup \mathrm{Ob}(|\beta|)$,

(ii) $\mathrm{Hom}_{|\varrho|}|_{|\alpha|} = \mathrm{Hom}_{|\alpha|}$; $\mathrm{Hom}_{|\varrho|}|_{|\beta|} = \mathrm{Hom}_{|\beta|}$;

$$\mathrm{Hom}_{|\varrho|}(A, B) = \bigcup_{X \in \mathrm{Ob}(|\gamma|)} \mathrm{Hom}_{|\beta|}(X, B) \circ \mathrm{Hom}_{|\alpha|}(A, X)$$

pour $A \in \mathrm{Ob}(|\varrho|) \setminus \mathrm{Ob}(|\beta|)$ et $B \in \mathrm{Ob}(|\varrho|) \setminus \mathrm{Ob}(|\alpha|)$;
$\mathrm{Hom}_{|\varrho|}(B, A)$ est défini symétriquement.

(iii) $\vec{\varrho}$ est défini analoguement à $\mathrm{Hom}_{|\varrho|}$ à partir de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$.

Clairement, cette construction se généralise au cas d'une classe quelconque non-vide de $\mathfrak{U}$-SR ayant une « bonne » intersection. Les détails sont laissés au lecteur.

(I.3.6.1) Exemples.

(*a*) Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de $\underset{\rightarrow}{\mathfrak{U}}^{\star}$-SR $\mathfrak{U}$-$\dot{\mathfrak{U}}$-orientés tels que

$$\alpha_i|_{\mathfrak{U}} = \alpha_k|_{\mathfrak{U}}$$
$$\vec{\alpha}_i(-, \dot{X}) = \vec{\alpha}_k(-, \dot{X})$$

pour tout couple $i, k \in I$ et $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(|\alpha_i|) \cap \mathrm{Ob}(|\alpha_k|)$. Alors, le recollement $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$ existe et il est un $\underset{\rightarrow}{\mathfrak{U}}^{\star}$-SR $\mathfrak{U}$-$\dot{\mathfrak{U}}$-orienté.

(*b*) Si α est un $\dot{\mathfrak{u}}$-crible, on a

$$\alpha = \bigcup_{\dot{X} \in \mathrm{Supp}(\alpha)} \alpha|_{\mathfrak{U}_{\dot{X}}}.$$

(I.3.7) Si α et β sont deux Cribles locaux, avec $\mathrm{Supp}(\alpha) = \dot{X}$ et $\mathrm{Supp}(\beta) = \dot{Y}$, un *morphisme de Cribles locaux* $\Phi = (F, \varphi)\colon \alpha \to \beta$ est un morphisme fort de $\underrightarrow{\mathcal{U}}^{\star}$-SR ([AF, 4, § 1]) déduit d'un morphisme $\dot{f}\colon \dot{X} \to \dot{Y}$ dans $\dot{\mathcal{U}}$ de la façon suivante:

1) $F|_{\mathcal{U}} = \mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ et $F(\dot{X}) = \dot{Y}$,

2) $F(g\colon U \to \dot{X}) = \dot{f} \circ g$;

φ en découle (loc. cit.).

Notons par $\boldsymbol{Cb}(\dot{\boldsymbol{u}})$, ou simplement $\boldsymbol{Cb}$ la catégorie des $\dot{\boldsymbol{u}}$-Cribles locaux, et par $\boldsymbol{Cb}(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{X})$, ou $\boldsymbol{Cb}(\dot{X})$ la catégorie des $\dot{\boldsymbol{u}}$-Cribles locaux en $\dot{X}$. Si $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, $h_{\dot{f}}$ est la notation pour le morphisme $h_{\dot{Y}} \to h_{\dot{X}}$ associé à $\dot{f}$.

(I.3.8) Proposition. *Les catégories des cribles et des Cribles locaux sont isomorphes*, i.e. *le foncteur*

$$(-)^{\wedge}_{X}\colon \boldsymbol{cb}(\mathcal{U}, X) \to \boldsymbol{Cb}(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{X})$$

qui associe à tout sous-foncteur $R \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X)$ *le* $\dot{\boldsymbol{u}}$*-Crible local en* $\dot{X}\hat{R}$, *défini dans* (I.3.5.1 (*a*)) *est un isomorphisme de catégories* . *De* $(-)^{\wedge}_{X}$, *on déduit immédiatement un isomorphisme*

$$(-)^{\wedge}\colon \boldsymbol{cb}(\mathcal{U}) \to \boldsymbol{Cb}(\dot{\boldsymbol{u}})\ .$$

(I.3.8.1) Remarque. L'isomorphisme catégoriel de la proposition précédente justifie les notations $\hat{R}, \hat{f}$ (R, resp. f, étant un crible local, resp. un morphisme des cribles locaux) que nous utiliserons dans la suite pour les Cribles locaux et pour les morphismes de Cribles locaux. Remarquons que $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X))^{\wedge} = h_{\dot{X}}$.

(I.3.9) Pour tout $\hat{R}$ dans $\boldsymbol{Cb}(\dot{X})$ et pour tout morphisme $\dot{f}\colon \dot{Y} \to \dot{X}$, le SR $\hat{R}_{\dot{f}} = \hat{R} \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}}$ s'identifie canoniquement à un $\dot{\boldsymbol{u}}$-Crible local en $\dot{X}$, appelé *extension de* $\hat{R}$ *par* $\dot{f}$. On voit immédiatement que cette construction donne un foncteur

$$(-)_{\dot{f}}\colon \boldsymbol{Cb}(\dot{X}) \to \boldsymbol{Cb}(\dot{Y})$$

appelé *foncteur de changement de base.*

Si $\hat{R} \subset \hat{S} \subset h_{\dot{X}}$ est une suite d'inclusions de Cribles, alors:

(I.3.9.1) $$\hat{R} \times_{\hat{S}} h_{\dot{Y}} \cong \hat{R}_{\dot{f}}\,.$$

(I.3.10) Soit $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{U}}}(\dot{Y}, \dot{X})$. Si $i_R\colon \hat{R} \subset h_{\dot{X}}$ est une inclusion de $\dot{\boldsymbol{u}}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, on écrira

$$\dot{f} < i_R \quad (\text{ou } h_{\dot{f}} < i_R, \text{ ou } \dot{f} < \hat{R})$$

pour indiquer l'existence d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} h_{\dot{Y}} \arrow[r, "h_{\dot{f}}"] \arrow[dr, dotted] & h_{\dot{X}} \\ & \hat{R} \arrow[u, hook, "i_R"'] \end{tikzcd}$$

(I.3.11) Lemme. *Avec les notations de* (I.1.2 (*b*)) *et de* (I.3.10), *pour tout* $f\colon Y \to \dot{X}$ *dans* $\underrightarrow{\mathfrak{U}}$, $\dot{\boldsymbol{u}}(f) < \hat{R}$ *si et seulement si* $f \in R(Y) = \vec{\hat{R}}(Y, \dot{X})$.

(I.3.12) Remarque. Avec les notations de (I.1.4 (iii)), si $\varkappa\colon H \to K$ et $\lambda\colon L \to K$ sont deux $\hat{\mathfrak{U}}$-morphismes, nous écrirons $\varkappa < \lambda$, pour dire qu'il existe un $(\hat{\mathfrak{U}}/K)$-morphisme $\varkappa \to \lambda$. En particulier, si $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{U}}}(\dot{Y}, \dot{X})$ et si $l\colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ est un objet de $\dot{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, nous écrirons $\dot{f} < l$, ou $\dot{f} < L$, si $\boldsymbol{H}(\dot{f}) < l$.

Chapitre II

SYSTÈMES RELATIONNELS ET TOPOLOGIES DE GROTHENDIECK

(II.0) Introduction au chapitre.

Tout d'abord, dans ce chapitre, on introduit les *Topologies de Grothendieck-Verdier* (II.1), traduction dans le langage des SR des topologies de Grothendieck, compte tenu du théorème d'isomorphisme (I.3.8).

En second lieu, étant donné un projecteur $\boldsymbol{v}$ (I.1.4), on définit les *cribles généralisés* et on démontre un théorème d'isomorphisme (II.2.2.2) étendant (I.3.8), duquel s'ensuit l'importance d'une classe de SR, appelés $\boldsymbol{v}$-Cribles (II.2.2). A ce point, on donne des exemples (II.2.3) montrant, entre autre, que la théorie des structures relationnelles [11] et, en particulier, celle des algèbres universelles [6] sont aisément insérées dans le cadre des $\boldsymbol{v}$-Cribles. D'ailleurs, cet exemple sera repris dans le chapitre III pour voir que l'arithmétique fonctorielle [AF] des Cribles, dans ce cas, coïncide avec l'arithmétique classique des structures relationnelles [11].

Les $\boldsymbol{v}$-Cribles, étant ainsi disponibles, permettent de bâtir de nouvelles Topologies: les *$\boldsymbol{v}$-Topologies* (II.2.4) et les *Topologies de Grothendieck-Yoneda* (II.6). Une première raison d'être en est montrée avec un exemple dans la catégorie des schémas (exemple qui se place au-delà de la théorie « ancienne »), construit à partir du projecteur « enveloppe affine » (EGA II, (2.1.12)) qui sépare les schémas affines des autres. De l'analyse de cet exemple, on tire un résultat (II.3.2.2) « dual » au fait bien connu qu'un schéma est un foncteur particulier en anneaux commutatifs [EGA I, 2.éd] (ce dernier étant la base du « problème d'existence de Grothendieck » [2] [12]).

La recherche d'une théorie valable de faisceaux pour les $\boldsymbol{v}$-Topologies suggère l'introduction des « *morphismes imaginés* » (II.4) entre foncteurs contravariants en ensembles, notion liée à celle des foncteurs pro-représentables [3], [SGA IV]. Dans cet ordre d'idées, on montre l'existence d'un foncteur, noté ***im***, qui à tout morphisme ayant pour codomaine un « foncteur fondamental » (II.2.2), associe un morphisme imaginé de même codomaine. Les paragraphes (II.4) et (II.5) sont entièrement consacrés à une étude technique des propriétés de ces morphismes et à la démonstration du fait que ***im*** est un projecteur strict (II.4.5).

Les morphismes imaginés permettent la construction des Topologies de Grothendieck-Yoneda, à l'aide desquelles une *théorie de faisceaux* est développée. Les théorèmes-clés de la théorie ancienne des faisceaux [SGA IV, Exp. II, § 2] restent vrais.

En outre, la construction des Topologies à partir de prétopologies est traitée en détail, permettant de nombreux exemples.

Dans le dernier paragraphe, on étudie des Topologies « locales », appelées *Topologies tangentes*, déduites à partir d'une Topologie de Grothendieck-Yoneda, en utilisant le projecteur strict ***im***. *Ces topologies ne sont pas, en général, des Topologies de Grothendieck-Verdier, même en partant d'une telle Topologie* (!). La théorie généralisée trouve donc, a posteriori, une motivation intrinsèque.

(II.1) Topologies de Grothendieck-Verdier en termes de Cribles locaux.

(II.1.1) Etant donnée une catégorie $\mathfrak{U}$, si $\dot{\boldsymbol{u}}$ est le projecteur introduit dans (I.1.2 (*b*)), une $\dot{\boldsymbol{u}}$-*Topologie*, ou *Topologie de Grothendieck-Verdier sur* $\mathfrak{U}$, $\boldsymbol{t}$ consiste en une classe $\boldsymbol{t}(X)$ de $\underrightarrow{\mathfrak{U}}^{\star}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{U}})$, satisfaisant les axiomes suivants:

($\boldsymbol{t}1$) (*stabilité par changement de base*). *Pour tout* $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{U}})$, $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$, $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{U}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, *on a* $\hat{R}_{\dot{f}} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$;

($\boldsymbol{t}2$) (*caractère local*). *Soient* $\hat{R}, \hat{R}'$ *deux Cribles locaux en* $\dot{X}$, *dont* $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$. *Si* $\hat{R}'_{\dot{f}} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$, *pour tout* $\dot{f} < \hat{R}$, $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{U}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, *alors* $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$;

($\boldsymbol{t}3$) *Pour tout* $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{U}})$, $h_{\dot{X}} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$ (I.3.5.1 (*c*)).

(II.1.2) Vu la Proposition (I.3.8), les axiomes précédents traduisent les axiomes d'une topologie sur la catégorie $\mathcal{U}$, donnés dans [SGA IV, Exp. II. § 1.1] dans le langage des systèmes relationnels.

Conformément à la théorie de Verdier (loc. cit), on appellera $\dot{\boldsymbol{u}}$-*Site* un couple $(\underrightarrow{\mathcal{U}}^{\star}, \boldsymbol{t})$.

(II.2) ***v-Sites.***

(II.2.0) Supposons donné un projecteur $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (I.1.4). Dans tout ce paragraphe, nous utiliserons les notations de (I.1.4 (iii)).

(II.2.1) Dans la situation de (II.2.0), un $\boldsymbol{v}$-*Crible* σ *de support* $\dot{\mathcal{A}} = \mathrm{Supp}(\sigma)$, $\mathcal{A} \subset \underrightarrow{\mathcal{V}}^{\mathrm{Ob}}$, est un $\mathcal{O}^{\star}$-SR tel que:

(*a*) il est $\mathcal{U}$-$\dot{\mathcal{V}}$-orienté,

(*b*) $\mathcal{U} \subset |\sigma|$,

(*c*) $\mathrm{Ob}(|\sigma|) \cap \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}}) = \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{A}})$,

(*d*) pour tout $f \in \vec{\sigma}(Y, \dot{X})$ et pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Z, \dot{\boldsymbol{v}}(Y))$, on a $\dot{\boldsymbol{v}}(f) \circ g \in \vec{\sigma}(Z, \dot{X})$ i.e. $\dot{\boldsymbol{v}}(f) < \vec{\sigma}(-, \dot{X})$ (I.3.10).

On dit encore que σ *est local en* $\dot{X}$, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$, si $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\dot{X}\}$.

(II.2.1.1) Exemples.

(1) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{U}$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ (I.1.2 (*b*)) le projecteur canonique. Alors, tout $\dot{\boldsymbol{u}}$-Crible local est un $\boldsymbol{v}$-Crible local.

(2) Soit $S(Y, \dot{X}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Y, \dot{X})$ un ensemble de morphismes donné, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$. Par analogie avec l'exemple (*d*) de (I.3.5.1), on peut construire un $\boldsymbol{v}$-Crible σ, appelé $\boldsymbol{v}$-*Crible engendré par la famille* $\{S(Y, \dot{X}) \mid Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U}), \dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})\}$.

(3) Soit $h(\boldsymbol{v})$, ou simplement h, le système relationnel $\big(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\boldsymbol{v})}(-,-)\big)$. Pour $\dot{\mathcal{J}} \subset \dot{\mathcal{V}}^{\mathrm{Ob}}$, soit $\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{J}}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$, avec $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}_{\dot{\mathcal{J}}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{U}) \cup \dot{\mathcal{J}}$. Si $\dot{\mathcal{J}} = \{\dot{X}\}$, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$, on note $h_{\dot{X}} = h(\boldsymbol{v})|_{\mathcal{U}_{\dot{X}}}$, ce dernier étant appelé $\boldsymbol{v}$-*Crible local plein en* $\dot{X}$.

(II.2.2) La définition de *morphisme de* $\boldsymbol{v}$-*Cribles locaux* s'obtient de celle de morphisme de $\boldsymbol{u}$-Cribles locaux, donnée dans (I.3.7), en remplaçant partout $\dot{\mathcal{U}}$ par $\dot{\mathcal{V}}$.

Notons par

$\boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v}, \dot{X})$ la catégorie des $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$,

$\boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v})$ la catégorie de tous les $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux.

Si $\boldsymbol{H}\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\wedge$ est le foncteur introduit dans (I.1.4 (iii)), les foncteurs $\boldsymbol{H}(\dot{X})\colon \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ associés aux objets $\dot{X}$ de $\mathcal{V}$ sont appelés *foncteurs fondamentaux.*

Si $R \subset \boldsymbol{H}(\dot{X})$ et $S \subset \boldsymbol{H}(\dot{Y})$ sont des sous-foncteurs de deux foncteurs fondamentaux, on considère comme *morphismes de R à S* seulement les transformations naturelles induites par les morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\dot{X}, \dot{Y})$.

Notons par

$\boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}(\dot{X}))$ la catégorie de tous les sous-foncteurs du foncteur fondamental $\boldsymbol{H}(\dot{X})$,

$\boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v})$ la catégorie de tous les sous-foncteurs des foncteurs fondamentaux.

Analoguement à (I.3.8), les catégories $\boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}(\dot{X}))$ et $\boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v}, \dot{X})$ sont isomorphes à travers le foncteur

(II.2.2.1) $$(-)^\wedge_{\dot{X}}\colon \boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}(\dot{X})) \to \boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v}, \dot{X})$$

défini comme dans (I.3.8). Le foncteur inverse de tel foncteur est le foncteur d'oubli.

Plus généralement, comme dans (loc. cit.), on a un isomorphisme

(II.2.2.2) $$(-)^\wedge\colon \boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v})\,.$$

Donc par la suite nous conserverons les notations $\hat{R}$ (resp. $\hat{f}$, resp. $i_R\colon \hat{R} \hookrightarrow h_{\dot{X}}$) pour les $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux (resp. morphismes de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux, resp. inclusions).

Si $\hat{R}$ est dans $\boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v}, \dot{X})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\dot{Y}, \dot{X})$, par $\hat{R}_f$ nous noterons le $\boldsymbol{v}$-Crible, local en $\dot{Y}$, $\hat{R} \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}}$. Dans ce contexte, la formule (I.3.9.1) reste vraie. En outre, on a:

(II.2.2.3) $$\hat{R}_f(Z, \dot{Y}) = \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Z, \dot{Y}) \mid f \circ t \in \vec{\hat{R}}(Z, \dot{X})\}\,.$$

Avec les notations précédentes et les identifications (II.2.2.1) et (II.2.2.2), il est clair que ce qu'on entend par $f < \hat{R}$, $\hat{R} \cap \hat{S}$, $\hat{R} \subset \hat{S}$ etc.

(II.2.3) Exemple: Les algèbres universelles sont de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux.

Soit $\varrho\colon T \to \mathbb{N}$ une famille d'entiers non négatifs. En fixant un modèle de $\mathbb{N}$ dans Ens, encore noté $\mathbb{N}$, notons T (resp. $\varrho(T)$) les catégories qui ont pour objets les éléments de T (resp. ceux de $\varrho(T)$) et par morphismes seulement les identités.

Soit $\mathrm{Ens}_\varrho = \varrho(T) \underset{\rightarrow}{\amalg} (\mathrm{Ens} \setminus \varrho(T))$ et soit $\mathrm{Ens}(\varrho)$ la catégorie suivante:

(1) $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}(\varrho)) = \mathrm{Ob}(T) \amalg \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_\varrho)$,

(2 i) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}(\varrho)}(t, t') = \mathrm{Hom}_T(t, t')$, $t, t' \in T$,

(2 ii) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}(\varrho)}(t, A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\varrho(t), A)$, $t \in T$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_\varrho)$,

(2 iii) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}(\varrho)}(A, t) = \emptyset$, $t \in T$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_\varrho)$,

(2 iv) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}(\varrho)}(A, A') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}_\varrho}(A, A')$, $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_\varrho)$.

En plus, l'application $t \mapsto \varrho(t)$ détermine de façon inmédiate un projecteur strict $\boldsymbol{v}(\varrho)\colon \mathrm{Ens}(\varrho) \to \mathrm{Ens}(\varrho)$.

Ceci étant, un $\boldsymbol{v}(\varrho)$-Crible local en $\dot{B} \in (\mathrm{Ens}(\varrho))^\bullet$ n'est autre qu'une « structure relationnelle » de support B et de type $\varrho\colon T \to \mathbf{N}$, dans le sens de [11]. En plus, un morphisme de $\boldsymbol{v}(\varrho)$-Cribles locaux (II.2.2) correspond biunivoquement aux homomorphismes des structures relationnelles associées. En particulier, ce qui précède se spécialise facilement aux algèbres universelles et à leurs homomorphismes.

Cet exemple sera repris au chapitre III, pour illustrer l'arithmétique des $\boldsymbol{v}$-Cribles.

(II.2.4) Dans la situation de (II.2.0), une *$\boldsymbol{v}$-Topologie* $\boldsymbol{t}$ est la donnée, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{V}})$, d'une classe $\boldsymbol{t}(\dot{X})$ de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, appelés Cribles $\boldsymbol{t}$-couvrants, soumis aux axiomes ($\boldsymbol{t}1$), ($\boldsymbol{t}2$) et ($\boldsymbol{t}3$) de (II.1.1), où l'on remplace $\dot{\mathfrak{U}}$ per $\dot{\mathfrak{V}}$. On appellera *$\boldsymbol{v}$-Site* le couple $(\mathcal{O}^{\star}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{t})$.

(II.2.5) Proposition. *Soient $\hat{R}$, $\hat{R}'$ deux $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux de support, respectivement, $\dot{X}$ et $\dot{Y}$. Soit $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$ tel que $\dot{f} < \hat{R}$, alors*

(1) $\hat{R}_{\dot{f}} = h_{\dot{Y}}$,

(2) *si* $\hat{R} \subset \hat{R}'$, *alors* $\hat{R}_{\dot{f}} = \hat{R}'_{\dot{f}}$,

(3) $\hat{R}'_{\dot{f}} = (\hat{R} \cap \hat{R}')_{\dot{f}}$.

Dans tous les cas, l'égalité des catégories est triviale. (2) est conséquence de (1). D'après (II.2.2), (1) est conséquence des définitions. Pour avoir $\hat{R}'_{\dot{f}} \subset (\hat{R} \cap \hat{R}')_{\dot{f}}$, soit $t \in \hat{R}'_{\dot{f}}(Z, \dot{Y})$, donc $\dot{f} \circ t \in \vec{\hat{R}}'(Z, \dot{X})$ (II.2.2.3). Par choix de $\dot{f}$, on a aussi $\dot{f} \circ t \in \vec{\hat{R}}(Z, \dot{X})$, donc $t \in \vec{\hat{R}}_{\dot{f}}(Z, \dot{Y})$, et finalement $t \in \hat{R}_{\dot{f}}(Z, \dot{Y}) \cap \cap \hat{R}'_{\dot{f}}(Z, Y) = \overrightarrow{(\hat{R} \cap \hat{R}')}_{\dot{f}}(Z, \dot{Y})$ (II.2.2). L'inclusion inverse suit de la même façon. Q.E.D.

(II.2.6) PROPOSITION. *Soit $\boldsymbol{t}$ une $\boldsymbol{v}$-Topologie. Soient $\hat{R}, \hat{R}'$ deux $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$.*

(*a*) *Si $\hat{R} \subset \hat{R}'$ et $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$, alors $\hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$,*

(*b*) *si $\hat{R}$, $\hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$, alors $\hat{R} \cap \hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$.*

(*a*) découle du fait que $\hat{R}_{\dot{f}} = \hat{R}'_{\dot{f}} = \boldsymbol{h}_{\dot{Y}}$, pour tout $\dot{f}: \dot{Y} \to \dot{X}$ tel que $\dot{f} < \hat{R}$, compte tenu de ($\boldsymbol{t}2$) et ($\boldsymbol{t}3$). (*b*): par (II.2.5 (3)), $(\hat{R} \cap \hat{R}')_{\dot{f}} = \hat{R}'_{\dot{f}}$, si $\dot{f} < \hat{R}$. D'autre part, $\hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$ implique $\hat{R}_{\dot{f}} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$ par ($\boldsymbol{t}1$), et on conclut $\hat{R} \cap \hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$ par ($\boldsymbol{t}2$).

(II.2.7) COROLLAIRE. *L'axiome ($\boldsymbol{t}2$) est équivalent à la conjonction des deux axiomes suivants:*

($\boldsymbol{t}2$ i) ($\boldsymbol{t}2$) *vaut pour $\hat{R}' \subset \hat{R}$;*

($\boldsymbol{t}2$ ii) *si $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$ et $\hat{R} \subset \hat{R}'$, alors $\hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$.*

Il suffit de voir que ($\boldsymbol{t}2$ i) et ($\boldsymbol{t}2$ ii) impliquent ($\boldsymbol{t}2$). Supposons donnés $\hat{R}', \hat{R}$ deux $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$ et $\hat{R} \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$. Si $\hat{R}'_{\dot{f}} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$, pour tout $\dot{f} < \hat{R}$, alors $(\hat{R} \cap \hat{R}')_{\dot{f}} = \hat{R}'_{\dot{f}}$ et ($\boldsymbol{t}2$ i), appliqué à $\hat{R} \cap \hat{R}' \subset \hat{R}$, nous assure que $\hat{R} \cap \hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$, donc par ($\boldsymbol{t}2$ ii), $\hat{R}' \in \boldsymbol{t}(\dot{X})$.

(II.2.8) *Topologies engendrées par des familles de morphismes.* Fixons un projecteur $\boldsymbol{v}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Soient $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$ deux $\boldsymbol{v}$-Topologies; on dit que $\boldsymbol{t}_1$ *est plus fine que* $\boldsymbol{t}_2$, en symboles $\boldsymbol{t}_1 > \boldsymbol{t}_2$, si, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, la classe $\boldsymbol{t}_1(\dot{X})$ contient $\boldsymbol{t}_2(\dot{X})$.

On appelle *$\boldsymbol{v}$-Topologie discrète*, notée $\boldsymbol{dis}_{\boldsymbol{v}}$ (ou $\boldsymbol{dis}$), la $\boldsymbol{v}$-Topologie maximale pour cet ordre, i.e. celle dont tous les $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux sont couvrants. La $\boldsymbol{v}$-Topologie minimale pour cet ordre est dite *$\boldsymbol{v}$-Topologie chaotique*, notée $\boldsymbol{ch}_{\boldsymbol{v}}$ (ou $\boldsymbol{ch}$), i.e. celle ne contenant que les $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux pleins.

Il est évident que, pour toute classe $(\boldsymbol{t}_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{v}$-Topologies, il existe soit la $\boldsymbol{v}$-Topologie $\inf_{i\in I}(\boldsymbol{t}_i)$ soit la $\boldsymbol{v}$-Topologie $\sup_{i\in I}(\boldsymbol{t}_i)$, relativement à « $>$ ».

Or donnons

(j) pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, une classe d'indices $I(\dot{X})$,

(jj) pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, pour tout $i \in I(\dot{X})$, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, un sous-ensemble $S_i(Y, \dot{X}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \dot{X})$.

Alors, ces données permettent de construire une $\boldsymbol{v}$-Topologie $\boldsymbol{s}$: c'est la plus petite telle que, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, pour tout $i \in I(\dot{X})$, le $\boldsymbol{v}$-Crible local engendré par S_i (II.2.1.1 (2)) soit un $\boldsymbol{v}$-Crible couvrant (en $\dot{X}$) de $\boldsymbol{s}$. On dit que $\boldsymbol{s}$ est *la $\boldsymbol{v}$-Topologie engendrée par les données* (j) *et* (jj).

(II.3) Exemples de v-Sites.

(II.3.1) Considérons le projecteur $\boldsymbol{u}: \underset{\to}{\mathcal{U}} \to \underset{\to}{\mathcal{U}}$ (I. 1.2 (b)). On a alors une correspondance biunivoque entre les $\mathcal{U}$-sites de Grothendieck [SGA IV, Exp. II, § 1.1.5] et les $\boldsymbol{u}$-Sites, (II.1.1) et (II.2.4), vu la Proposition (I.3.8).

(II.3.2) Soit k un corps et $\mathcal{C} = \boldsymbol{Sch}/k$ la catégorie des k-schémas. Soit $\boldsymbol{v} = \mathrm{Spec}\circ H^0 \colon X \mapsto \mathrm{Spec}(H^0(X, \mathcal{O}_X))$. Il est facile de voir que $\boldsymbol{v}$ est un projecteur strict [EGA I, (2.2.4), 1. éd.]. $\mathcal{V}$ est donc la catégorie des k-schémas affines et $\mathcal{U}$ est la catégorie des k-schémas *non*-affines.

Les données (j) et (jj) de (II.2.8) permettent de construire tous les $\boldsymbol{v}$-Sites qu'on veut dans $\mathcal{O}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{Sch}/k \setminus \boldsymbol{Sch.aff}/k) \underset{\to}{\amalg} \boldsymbol{Sch.aff}/k$. Remarquons que, jusqu'ici, on aurait pu choisir un schéma de base quelconque, au lieu d'un corps. Par contre, cette hypothèse interviendra dans ce qui suit.

Montrons qu'on peut construire un foncteur

$$\boldsymbol{T} \colon \boldsymbol{Sch.aff}/k \to (\boldsymbol{Sch}/k \setminus \boldsymbol{Sch.aff}/k)$$

ayant la propriété de la Proposition (I.1.5). Fixons pour cela une k-variété P non affine, tel que $H^0(P, \mathcal{O}_P) = k$, par exemple un espace projectif $\mathbb{P}_n(k)$. Posons $\boldsymbol{T}(\mathrm{Spec}(A)) = P \times_k A$. La formule de Künneth:

$$H^i(P \times_k A, \mathcal{O}_{P\times_k A}) = \bigoplus_{j+l=i} \left(H^j(P, \mathcal{O}_P) \otimes_k H^l(\mathrm{Spec}(A), \tilde{A})\right)$$

[EGA III, (6.7.8)] et le critère de Serre [EGA II, (5.2.1)] nous assurent que $\boldsymbol{T}(\mathrm{Spec}(A))$ n'est pas affine et que $H^0(P \times_k A, \mathcal{O}_{P\times_k A}) \cong A$. Donc, on a

$$(\mathrm{Spec}\circ H^0)\circ \boldsymbol{T} \cong \mathbf{1}_{\boldsymbol{Sch.aff}/k}\,.$$

(II.3.2.1) Corollaire. *Le foncteur canonique*

$$\boldsymbol{H} \colon \mathcal{O}(\mathrm{Spec}\circ H^0) \to \mathcal{O}^{\wedge}(\mathrm{Spec}\circ H^0) \qquad (\mathrm{I.1.4\ (iii)})$$

est de Yoneda.

Ceci est conséquence de ce qui précède et de (I.1.5).

(II.3.2.2) Remarque. On sait [EGA I, (2.3.6)] que

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Sch}}(-, X)|_{\boldsymbol{Sch.aff}}$$

est un foncteur pleinement fidèle. Le Corollaire (II.3.2.1) fournit un résultat « dual », dans le cas des k-schémas.

(II.4) Foncteurs et morphismes imaginés.

(II.4.0) Conservons les notations de (II.2.0). Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier quelques notions utiles dans la suite, notamment celle de « foncteur imaginé », liée à la notion de « foncteur pro-représentable » ([3], ch. III, § 5).

La partie centrale du présent numéro consiste en la démonstration de l'existence d'un projecteur strict de $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$ (I.1.4 (iii)), noté $\boldsymbol{im}_{\dot{X}}$:

(II.4.1) Avec les notations de (I.1.4 (iii)), supposons $\boldsymbol{H}\colon \mathcal{O}(\boldsymbol{v}) \to \mathcal{O}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$ de Yoneda. Fixons, pour un moment, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{V}})$. Soit $\mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ *la catégorie des diagrammes à valeurs dans* $\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}$. Définissons un foncteur

$$\text{(II.4.1.1)} \qquad \boldsymbol{co}_{\dot{X}}\colon \mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}) \to \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$$

noté aussi $\boldsymbol{co}$, si aucune confusion ne résulte, de la manière suivante: si $D\colon \mathfrak{D} \to \dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}$ est un objet de $\mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$, on pose $\boldsymbol{co}_{\dot{X}}(D) = \varinjlim(\boldsymbol{H}_{\dot{X}} \circ D)$, où $\boldsymbol{H}_{\dot{X}}\colon \dot{\mathfrak{V}}/\dot{X} \hookrightarrow \mathcal{O}/\dot{X} \to \mathcal{O}^{\wedge}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$ est déduit de façon évidente de $\boldsymbol{H}$.

On notera aussi $\boldsymbol{co}(D) = D^{co} \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$. Egalement, si $t\colon D \to D'$ est un morphisme dans $\mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$, on notera t^{co} le $\boldsymbol{H}(\dot{X})$-morphisme canonique $D^{co} \to D'^{co}$, déduit de t.

(II.4.2) En conservant les notations de (II.4.1), pour définir le foncteur

$$\text{(II.4.2.1)} \qquad \boldsymbol{D}_{\dot{X}}\colon \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$$

noté aussi $\boldsymbol{D}$, considérons d'abord l'endofoncteur

$$\text{(II.4.2.2)} \qquad \boldsymbol{R}_{\dot{X}}\colon \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$$

noté aussi $\boldsymbol{R}$, défini par

$$\boldsymbol{R}_{\dot{X}}(l) = \mathrm{Im}(l) \subset \boldsymbol{H}(\dot{X})$$

si $l\colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ est un objet de $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$. $\boldsymbol{R}(l)$ sera aussi noté $\boldsymbol{R}_l$, ou $\boldsymbol{R}_L$, si possible. Il est évident que $\boldsymbol{R}$ est un projecteur strict.

Or, soit $i_R\colon R \hookrightarrow \boldsymbol{H}(\dot{X})$ un sous-foncteur du foncteur fondamental $\boldsymbol{H}(\dot{X})$. Posons $\boldsymbol{D}(i_R)$ égal au diagramme

$$\{\dot{v} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{V}, \dot{X}) \mid \boldsymbol{H}(\dot{v}) < i_R\} \qquad \text{(I.3.12)}\,.$$

Evidemment, si $R' \xrightarrow{j} R \hookrightarrow \boldsymbol{H}(\dot{X})$, on a une inclusion

$$\boldsymbol{D}(j) \colon \boldsymbol{D}(i_{R'}) \hookrightarrow \boldsymbol{D}(i_R) .$$

Dans le cas général, si $l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ est dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, on pose

$$\boldsymbol{D}(l) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) ,$$

diagramme qu'on notera aussi $\boldsymbol{D}_l$, ou $\boldsymbol{D}_L$. Si $t \colon l \to l'$ est un morphisme dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, on pose $\boldsymbol{D}(t) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l \hookrightarrow \boldsymbol{R}_{l'})$.

(II.4.3) Conservons les notations et hypothèses de (II.4.1) et (II.4.2). De ce qui précède, on déduit un endofoncteur de $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$:

(II.4.3.1) $$\boldsymbol{im}_{\dot{X}} = \boldsymbol{co}_{\dot{X}} \circ \boldsymbol{D}_{\dot{X}} \colon \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$$

noté simplement $\boldsymbol{im}$, si aucune confusion n'a lieu. On posera $l^{im} \colon L^{im} \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ à la place de $\boldsymbol{im}_{\dot{X}}(l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X}))$.

(II.4.4) REMARQUE. Il est facile de vérifier que

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{im} \circ \boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R} .$$

(II.4.5) PROPOSITION. *Conservons les notations de* (II.4.3). *L'endofoncteur* $\boldsymbol{im}_{\dot{X}}$ *est un projecteur strict. Plus précisément,*

(i) *pour tout* $l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$, $(l^{im})^{im} \cong l^{im}$;

(ii) *pour tout* $l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$, *il existe un seul* $\boldsymbol{H}(\dot{X})$*-morphisme* $\eta_L \colon l \to l^{im}$;

(iii) η_L *définit une transformation naturelle* $\mathbf{1}_{\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})} \to \boldsymbol{im}_{\dot{X}}$;

(iv) *pour tout,* $l, l' \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}))$, *il existe au plus un morphisme* $l \to (l')^{im}$. *Il existe si et seulement si* $\boldsymbol{R}_l \subset \boldsymbol{R}_{l'}$:

(i) Soit $k = l^{im} \colon L^{im} \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$. Montrons que $k^{im} = k$. Il suffit de vérifier l'égalité $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}_l$. Par définition de k, on a $\boldsymbol{R}_k \hookrightarrow \boldsymbol{R}_l$. Pour avoir $\boldsymbol{R}_l \hookrightarrow \boldsymbol{R}_k$, soit $Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{U})$ et $t \in \boldsymbol{R}_l(Z)$, alors

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) \qquad \big(\text{II.2.1 } (d)\big) .$$

Soit $\eta_Z \colon Z \to \dot{\boldsymbol{v}}(Z)$ le morphisme donné par hypothèse sur $\boldsymbol{v}$. Alors, $t = \boldsymbol{H}(\dot{\boldsymbol{v}}(t))_Z(\eta_Z) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) \circ \eta_Z$ est dans $\boldsymbol{R}_{l^{im}}(Z)$, donc $k^{im} = k$.

(ii) Soit $Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{U})$, $l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$. Si $t \in L(Z)$, on lui associe, fonctoriellement en Z, un élément $\eta_{L,Z}(t) \in L^{im}(Z)$ de la manière suivante: c'est la classe de $\eta_Z: Z \to \dot{\boldsymbol{v}}(Z)$ dans $L^{im}(Z)$, où $\dot{\boldsymbol{v}}(Z)$ est dans le diagramme $\boldsymbol{D}(l^{im})$ à travers le morphisme structural $\dot{\boldsymbol{v}}(l_Z(t)): \dot{\boldsymbol{v}}(Z) \to \dot{X}$, vu que $\boldsymbol{D}(l) = \boldsymbol{D}(l^{im})$. La vérification de l'unicité de η_Z est directe.

(iii) Soient $l: L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ et $l': L' \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ deux objets de $\hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$ et $f: L \to L'$ un $\boldsymbol{H}(\dot{X})$-morphisme. Il s'agit de voir que, pour tout $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L(Z) & \xrightarrow{f_Z} & L'(Z) \\ {\scriptstyle \eta_{L,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{L',Z}} \\ L^{im}(Z) & \xrightarrow{f_Z^{im}} & L'^{im}(Z) \end{array}$$

est commutatif. Mais cela est clair en utilisant les faits suivants:

$$f^{im} = (\boldsymbol{R}_f)^{im},$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}(l_Z(t)) = \dot{\boldsymbol{v}}\big(l'_Z(f_Z(t))\big) \text{ pour tout } t \in L(Z).$$

(iv) découle de (ii) et de ce que tout morphisme, s'il existe, de l^{im} à $(l')^{im}$ provient de l'inclusion $\boldsymbol{R}_l \hookrightarrow \boldsymbol{R}_{l'}$. Q.E.D.

(II.5) Quelques propriétés des foncteurs $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{R}$, *co* et *im*.

(II.5.0) Dans ce numéro, on donnera quelques résultats techniques nécessaires pour la suite. On pourra les omettre en première lecture et s'y reporter, si nécessaire. Les notations sont toujours celles de (I.1.4 (iii)) et de (II.4).

(II.5.1) Soit $\varkappa: H \to K$ un morphisme dans $\hat{\mathcal{U}}$. Soit $\Delta(\varkappa)$ le diagramme dans $\hat{\mathcal{U}}/K$ constitué des objets $\xi_\lambda: \boldsymbol{H}(\dot{X}_\lambda) \to K$ tels que $\mathrm{Im}(\xi_\lambda) \subset \mathrm{Im}(\varkappa)$, $\dot{X}_\lambda$ étant dans $\dot{\mathcal{V}}$ (*).

On dira que:

1) $\varkappa$ est un *morphisme imaginé*, si $\varkappa = \varinjlim \Delta(\varkappa)$,

2) un $\boldsymbol{H}(\dot{X})$-*objet* L de $\hat{\mathcal{U}}$ est *imaginé*, si le morphisme structural l'est, $\dot{X}$ étant dans $\dot{\mathcal{V}}$,

3) un objet L de $\hat{\mathcal{U}}$ est *auto-imaginé*, si le morphisme $\mathbf{1}_L$ est imaginé.

(II.5.2) Remarque. Si le foncteur $\boldsymbol{H}: \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\wedge$ est de Yoneda (I.1.3), alors, pour tout l dans $\hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, on a

(II.5.2.1) $$\varinjlim \Delta(l) \simeq l^{im}.$$

(*) En ce qui concerne les morphismes des diagrammes que nous construisons, nous supposons, sauf indication contraire, qu'ils sont tous les morphismes compatibles.

En outre, sous la même hypothèse sur $\boldsymbol{H}$, la Proposition (II.4.5) peut s'exprimer en disant que, pour tout l dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, l^{im} est un $\boldsymbol{H}(\dot{X})$-objet imaginé.

(II.3.5) Pour tout $\dot{\mathfrak{V}}$-morphisme $\dot{f}\colon \dot{Y} \to \dot{X}$, on a un *foncteur de « changement de base »*:

(II.5.3.1) $$\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{f})\colon \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{Y})$$

défini par

$$\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{f})(l) = L \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}) \to \boldsymbol{H}(\dot{Y}) \,,$$

où $l\colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$; $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{f})(l)$ sera aussi noté $L_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} \to \boldsymbol{H}(\dot{Y})$, ou $l_{\boldsymbol{H}(\dot{f})}$.

(II.5.4) Supposons que $\dot{\mathfrak{V}}$ admet les produits fibrés. Alors, pour tout $\dot{f} \in \operatorname{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, on a un autre *foncteur de « changement de base »*:

(II.5.4.1) $$\operatorname{Diagr}(\dot{f})\colon \operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}) \to \operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{Y}) \,.$$

En effet, si D est dans $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$, on a un diagramme dans $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{Y})$, noté $D \times_{\dot{X}} \dot{Y}$, constitué des $\dot{y}_\lambda \times_{\dot{X}} \dot{Y}\colon \dot{Y}_\lambda \times_{\dot{X}} \dot{Y} \to \dot{Y}$, les $\dot{y}_\lambda\colon \dot{Y}_\lambda \to \dot{X}$ étant dans D. Le foncteur $\operatorname{Diagr}(\dot{f})$ est alors défini par $\operatorname{Diagr}(\dot{f})(D) = D \times_{\dot{X}} \dot{Y}$.

En outre, si D et D' sont dans $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$, on notera $D \times_{\dot{X}} D'$ le diagramme de $\operatorname{Diagr}(\hat{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ constitué des

$$\dot{y}_\lambda \times_{\dot{X}} \dot{z}_\mu \; \dot{Y}_\lambda \times_{\dot{X}} \dot{Z}_\mu \to \dot{X} \,,$$

les $\dot{y}_\lambda$ étant dans D, et les $\dot{z}_\mu$ étant dans D'.

(II.5.5) Si D est dans $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{Y})$ et si $\dot{f} \in \operatorname{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, on notera par $\dot{f} \circ D$ le diagramme de $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ obtenu de D par composition avec le foncteur

(II.5.5.1) $$\dot{f} \circ - \colon \dot{\mathfrak{V}}/\dot{Y} \to \dot{\mathfrak{V}}/\dot{X} \,.$$

(II.5.6) Si $\dot{f} \in \operatorname{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$ et si $R \subset \boldsymbol{H}(\dot{X})$, nous entendons par $D(R, \dot{f})$ le diagramme de $\operatorname{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ constitué des $\dot{y}_\lambda\colon \dot{Y}_\lambda \to \dot{X}$ dans $\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}$ tels qu'il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\dot{Y}_\lambda \arrow[rr, "\dot{v}_\lambda"] \arrow[dr, "\dot{v}'_\lambda"'] & & \dot{X} \\
& \dot{Y} \arrow[ur, "\dot{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $\dot{y}'_\lambda$ dans $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{H}(\dot{f})})$. On voit aussitôt (II.5.5) que

$$\text{(II.5.6.1)} \qquad D(R, \dot{f}) = \dot{f} \circ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{H}(\dot{f})}) \,.$$

Si S est un autre sous-foncteur de $\boldsymbol{H}(\dot{X})$, nous désignerons par $D(R, S)$ le diagramme de $\mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ «réunion» des $D(R, \dot{f})$, pour $\dot{f} < S$. Plus précisément, $\dot{y}_\lambda \colon \dot{Y}_\lambda \to \dot{X}$ est dans $D(R, S)$ s'il existe $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$, $\dot{f} < S$, tel que $\dot{y}_\lambda$ est dans $D(R, \dot{f})$.

(II.5.7) Plus généralement, si $\varkappa \colon H \to K$ et $\lambda \colon L \to K$ sont deux morphismes dans $\hat{\mathfrak{U}}$, analoguement à (II.5.4) et (II.5.5), on peut définir un *foncteur de changement de base*

$$\text{(II.5.7.1)} \qquad - \times_K H \colon \mathrm{Diagr}(\hat{\mathfrak{U}}/K) \to \mathrm{Diagr}(\hat{\mathfrak{U}}/H)$$

par $\Delta(\mu) \mapsto \Delta(\mu) \times_K H$, et un *foncteur composition*

$$\text{(II.5.7.2)} \qquad \lambda \circ - \colon \mathrm{Diagr}(\hat{\mathfrak{U}}/H) \to \mathrm{Diagr}(\hat{\mathfrak{U}}/K)$$

par $\Delta(\nu) \mapsto \lambda \circ \Delta(\nu)$.

Analoguement au diagramme $D \times_{\dot{X}} D'$ de (II.5.4), on peut construire le diagramme $\Delta(\varkappa) \times_K \Delta(\lambda)$ dans $\mathrm{Diagr}(\hat{\mathfrak{U}}/K)$.

Si $\varphi \colon \boldsymbol{H}(\dot{X}) \to K$ est dans $\hat{\mathfrak{U}}/K$, on notera $\Delta(\varkappa, \varphi)$ le diagramme $\varphi \circ \Delta(\varkappa_\varphi)$ ($\varkappa_\varphi$ étant le morphisme structural $H \times_K \boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$).

(II.5.8) Proposition. *Supposons que* $\dot{\mathfrak{V}}$ *admette les produits fibrés et que le foncteur* $\boldsymbol{H} \colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\wedge$ *soit de Yoneda* (I.1.3). *Soit* $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathfrak{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$ *et soient* R, S *deux sous-foncteurs de* $\boldsymbol{H}(\dot{X})$, *alors*:

(*a*) $(\boldsymbol{D}(R) \times_{\dot{X}} \dot{Y})^{co} \cong (\boldsymbol{D}(R)^{co} \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}) \cong \big(\boldsymbol{D}(R \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}))\big)^{co}$;

(*a'*) $R^{im} \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}) \cong (R \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}))^{im}$;

(*b*) $(\boldsymbol{D}(R) \times_{\dot{X}} \boldsymbol{D}(S))^{co} \cong (\boldsymbol{D}(R))^{co} \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} (\boldsymbol{D}(S))^{co} \cong (\boldsymbol{D}(R \cap S))^{co}$;

(*b'*) $R^{im} \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} S \cong (R \cap S)^{im}$.

Si $l \colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *et* $l' \colon L' \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *sont deux objets de* $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, *alors*

(*c*) $\boldsymbol{R}(l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y})) \cong \boldsymbol{R}_l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y})$;

(*d*) $\boldsymbol{R}(l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} l') \cong \boldsymbol{R}_l \cap \boldsymbol{R}_{l'}$;

(*e*) $(l^{im})_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} \cong (l_{\boldsymbol{H}(\dot{f})})^{im}$;

(*f*) $l^{im} \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} l^{im} \cong (l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} l')^{im}$.

(II.5.9) REMARQUE. On notera que les affirmations (II.5.8 (*e*)) et (II.5.8 (*f*)) disent que la flèche canonique

$$L^{im}\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y}) \to L^{im}\times_{\boldsymbol{H}(\dot{H})}(\boldsymbol{H}(\dot{Y}))^{im}$$

est un isomorphisme, tenu compte de (II.4.5 (iv)), *sans* que $\boldsymbol{H}(\dot{Y})$ soit nécessairement isomorphe à $(\boldsymbol{H}(\dot{Y}))^{im}$ dans $\hat{\mathfrak{U}}/H(\dot{X})$.

(II.5.10) COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses que* (II.5.8):

(1) *si i, j sont deux objets imaginés dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, il en est de même de $i\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}j$;*

(2) *si $\varkappa\colon H\to K$ et $\lambda\colon L\to K$ sont deux $\hat{\mathfrak{U}}$-morphismes, alors:*

(2*a*) *si $\varkappa$ est imaginé, il en est de même de $\lambda\circ\varkappa$;*

(2*b*) *si $\lambda\circ\varkappa$ est imaginé et si λ est un monomorphisme, alors $\varkappa$ est imaginé;*

(3) *si $\varphi\colon l\to l'$ est un morphisme dans $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, alors φ^{im} est imaginé;*

(4) *les objets auto-imaginés avec les morphismes imaginés forment une sous-catégorie de $\hat{\mathfrak{U}}$, notée $\hat{\mathfrak{U}}^{aut.im}$.*

(II.5.11) *Démonstration de la Proposition* (II.5.8).

(*a*) Du fait que le foncteur $\boldsymbol{H}'$ commute aux produits fibrés (I.1.6) et que les produits fibrés sont universels dans $\hat{\mathfrak{U}}$, pour $y_\lambda\colon \dot{Y}_\lambda\to\dot{X}$ dans $\boldsymbol{D}(R)$, on a

$$\varinjlim\,(\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda\times_{\dot{X}}\dot{Y}))\cong\varinjlim\,(\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda)\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y}))\cong(\varinjlim\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda))\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y})\,.$$

En outre, il est immédiat que $\boldsymbol{D}(R)\times_{\dot{X}}\dot{Y}\subset\boldsymbol{D}(R\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y}))$. Si $\dot{w}_\mu$: $\dot{W}_\mu\to\dot{Y}$ est dans $\boldsymbol{D}(R\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y}))$, alors $\dot{w}'_\mu=\dot{f}\circ\dot{w}_\mu$ est dans $\boldsymbol{D}(R)$, donc $\dot{w}'_\mu\times_{\dot{X}}\dot{Y}$ est dans $\boldsymbol{D}(R)\times_{\dot{X}}\dot{Y}$. Cela nous permet de conclure que $\boldsymbol{D}(R)\times_{\dot{X}}\dot{Y}$ est cofinal dans $\boldsymbol{D}(R\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Y}))$, d'où (*a*).

(*a'*) Découle trivialement de (*a*).

(*b*) Analoguement à la démonstration de (*a*), si $\dot{y}_\lambda\colon\dot{Y}_\lambda\to\dot{X}$ est dans $\boldsymbol{D}(R)$ et si $\dot{z}_\mu\colon\dot{Z}_\mu\to\dot{X}$ est dans $\boldsymbol{D}(S)$, alors on a

$$\varinjlim_{\lambda,\mu}\,(\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda\times_{\dot{X}}\dot{Z}_\mu))\cong\varinjlim_{\lambda,\mu}\,(\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda)\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Z}_\mu))\cong$$
$$\varinjlim_{\mu}\big((\varinjlim_{\lambda}\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda))\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}\boldsymbol{H}(\dot{Z}_\mu)\big)\cong(\varinjlim_{\lambda}\boldsymbol{H}(\dot{Y}_\lambda))\times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})}(\varinjlim_{\mu}\boldsymbol{H}(\dot{Z}_\mu))\,.$$

En outre, en raisonnant comme ci-dessus, il est facile de voir que $\boldsymbol{D}(R) \times_{\dot{X}} \boldsymbol{D}(S)$ est cofinal dans $\boldsymbol{D}(R \cap S)$;

(b') est trivial à partir de (b);

(c) et (d) sont très faciles à vérifier;

(e) découle de (c) et (a');

(f) découle de (d) et (b').

(II.5.12) *Démonstration du Corollaire* (II.5.10).

(1) Découle de (II.5.2) et de (II.5.8 (f)).

(2) Il est immédiat que $\lambda \circ \Delta(\varkappa) = \Delta(\lambda \circ \varkappa)$. En outre,

$$\varinjlim \lambda \circ \Delta(\varkappa) \cong \lambda \circ \varinjlim \Delta(\varkappa) .$$

En effet, si $\mu \colon M \to K = \varinjlim \Delta(\varkappa)$, si $\nu \colon N \to L = \varinjlim \lambda \circ \Delta(\varkappa)$ et si ξ_σ: $\boldsymbol{H}(\dot{X}_\sigma) \to K$ est dans $\Delta(\varkappa)$, alors il existe un unique morphisme $\omega \colon N \to M$ dans $\mathfrak{U}/L$ qui commute le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{H}(\dot{X}_\sigma) \arrow[d, "\nu_\sigma"'] \arrow[dr, "\mu_\sigma"'] \arrow[drr, "\xi_\sigma"] & & \\
 & M \arrow[r, "\mu"'] & K \arrow[d, "\lambda"] \\
N \arrow[ur, "\omega"'] \arrow[rr, "\nu"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Analoguement, il existe un unique morphisme $\omega' \colon M \to N$ dans $\mathfrak{U}/K$ qui commute le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{H}(\dot{X}_\sigma) \arrow[dd, "\mu_\sigma"'] \arrow[dr, "\nu_\sigma"] \arrow[ddrr, "\xi_\sigma"] & & \\
 & N \arrow[dr, "\mu \circ \omega"'] & \\
M \arrow[ur, "\omega'"] \arrow[rr, "\mu"'] & & K
\end{tikzcd}$$

De ce qui précède, on tire que $M \cong N$.

Pour démontrer (2a) et (2b), il suffit de regarder la suite d'isomorphismes:

$$\varinjlim \Delta(\lambda\circ\varkappa) \cong \varinjlim \lambda\circ\Delta(\varkappa) \cong \lambda\circ\varinjlim \Delta(\varkappa) .$$

(3) Il est facile de vérifier que

$$l'^{im}\circ\Delta(\varphi^{im}) = \boldsymbol{D}(l^{im}) .$$

Donc, en raisonnant comme ci-dessus, on a

$$l^{im} \cong \varinjlim \boldsymbol{D}(l^{im}) \cong \varinjlim l'^{im}\circ\Delta(\varphi^{im}) \cong l'^{im}\circ\varinjlim \Delta(\varphi^{im}) .$$

Du fait que le morphisme $l^{im} \to l'^{im}$ est unique (II.4.5 (iv)), on conclut que $\varphi^{im} = \varinjlim \Delta(\varphi^{im})$.

(4) est trivial à partir de (2a).

(II.5.13) PROPOSITION. *Sous les hypothèses de* (II.5.8), *soient* $l\colon L \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *et* $m\colon M \to \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *deux objets imaginés de* $\hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$ *et* $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{V}}}(\dot{Y}, \dot{X})$,

(i) *Si* $\dot{f} < l < m$, *alors* $l_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} \cong m_{\boldsymbol{H}(\dot{f})}$.

(ii) *Si* $\dot{f} < l$, *alors, pour tout* m, *on a*

$$l_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} \cong (l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} m)_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} .$$

(i) Du fait que $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{H}(\dot{f})} \subset \boldsymbol{R}_l \subset \boldsymbol{R}_m$, on conclut par (II.5.8 (b')) et (II.5.9).

(ii) Vérification analogue à celle de (i).

(II.5.14) PROPOSITION. *Sous les hypothèses de* (II.5.8), *si* $R' \subset R \subset \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *est une chaîne d'inclusions dans* $\hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$, *alors*

$$D(R', R) = \boldsymbol{D}(R) \qquad \text{(II.5.6)} .$$

Il est facile de s'assurer que $D(R', R) \subset \boldsymbol{D}(R)$. Si $\dot{y}_\lambda\colon \dot{Y}_\lambda \to \dot{X}$ est dans $\boldsymbol{D}(R')$, du fait que $R' \subset R$, $\dot{y}_\lambda$ est dans $\boldsymbol{D}(R)$. Alors, on voit aussitôt que $\dot{y}_\lambda = \mathbf{1}_{\dot{Y}_\lambda}\circ\dot{y}_\lambda$ est dans $D(R', \dot{y}_\lambda)$.

(II.5.15) PROPOSITION. *Supposons vérifiées les hypothèses de* (II.5.8), *et supposons en plus que* $\dot{w}\colon \mathcal{U} \to \dot{\mathcal{V}}$ *soit quasi-surjectif* (i.e. *pour tout objet* $\dot{X}$ *de* $\dot{\mathcal{V}}$, *il existe un objet* X' *de* $\mathcal{U}$, *tel que* $\dot{w}(X') \cong \dot{X}$). *Soit* $\dot{x} = (x_\alpha\colon X_\alpha \to \dot{X})_{\alpha\in A}$ *une famille de* $\dot{\mathcal{V}}$-*morphismes. Notons par* $R_{\dot{x}} = \Big(\bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{Im}\, \boldsymbol{H}(\dot{x}_\alpha)\Big) \hookrightarrow \boldsymbol{H}(\dot{X})$ *et* *par* $D(\dot{x})$ *le diagramme dans* $\mathrm{Diagr}(\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X})$ *qui consiste des* $\dot{x}_\alpha$, $\alpha \in A$, *les morphismes de transition* $\dot{X}_\alpha \to \dot{X}_\beta$ *étant tous les* $\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}$*-morphismes de* $\dot{X}_\alpha$ *à* $\dot{X}_\beta$: *Alors on a*

$$\text{(i)}\quad \varinjlim D(\dot{x}) \cong \varinjlim \boldsymbol{D}(R_{\dot{x}}),$$

$$\text{(ii)}\quad \big(D(\dot{x})\big)^{co} \cong (R_{\dot{x}})^{im}.$$

En effet, si $\dot{y}_\lambda\colon \dot{Y}_\lambda \to \dot{X}$ est dans $\boldsymbol{D}(R_{\dot{x}})$, considérons un objet Y'_λ de $\mathfrak{U}$ tel que $\dot{w}(Y'_\lambda) \cong \dot{Y}_\lambda$:

Soit $\eta'_\lambda\colon Y'_\lambda \to \dot{w}(Y'_\lambda) \cong \dot{Y}_\lambda$. Du fait que $\dot{y}_\lambda$ est dans $\boldsymbol{D}(R_{\dot{x}})$, il existe un morphisme $\dot{x}_{\alpha_\lambda}$ dans $\dot{x}$ et un $\mathcal{C}$-morphisme $\beta_\lambda\colon Y'_\lambda \to \dot{X}_{\alpha_\lambda}$ tels que

$$\begin{tikzcd}
Y'_\lambda \arrow[r, "\eta'_\lambda"] \arrow[dr, "\beta_\lambda"'] & \dot{Y}_\lambda \arrow[r, "\dot{y}_\lambda"] & \dot{X} \\
& \dot{X}_{\alpha_\lambda} \arrow[ur, "\dot{x}_{\alpha_\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. Donc $\dot{Y}_\lambda \rightleftarrows \dot{w}(Y'_\lambda) \xrightarrow{\dot{w}(\beta_\lambda)} \dot{X}_{\alpha_\lambda}$ est le $\dot{\mathfrak{V}}/\dot{X}$-morphisme qui nous assure que $D(\dot{x})$ est cofinal dans $\boldsymbol{D}(R_{\dot{x}})$.

(II.5.16) PROPOSITION. *Sous les hypothèses de* (II.5.8), *soient* $\varkappa\colon H \to K$ *et* $\lambda\colon L \to K$ *deux objets de* $\hat{\mathfrak{U}}$. *Supposons de plus que* K *soit auto-imaginé et que, pour tout* $\varphi\colon \boldsymbol{H}(\dot{X}) \to K$, $\dot{X}$ *dans* $\dot{\mathfrak{V}}$, *on ait que* H_φ *et* L_φ *sont imaginés dans* $\hat{\mathfrak{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X})$; *alors:*

$$H \times_K L \to K$$

est imaginé.

En effet, il est bien connu que $(H \times_K L)_\varphi \cong H_\varphi \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} L_\varphi$, donc, si on note par ω le morphisme structural $H \times_K L \to K$ dans $\hat{\mathfrak{U}}/K$, alors on a:

$$\varkappa_\varphi \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \lambda_\varphi \cong \omega_\varphi^{im} = \big(\boldsymbol{D}(\omega_\varphi)\big)^{co}.$$

Par l'universalité des produits fibrés, on a:

$$\varinjlim_{\varphi \in \Delta(1_K)} \big(\boldsymbol{D}(\omega_\varphi)\big)^{co} \cong \varkappa \times_K \lambda.$$

Le diagramme obtenu des diagrammes (II.5.7) $\Delta(\omega, \varphi) = \varphi \circ \Delta(\omega_\varphi)$ en variant φ dans $\Delta(1_K)$, nous assure que ω est imaginé dans $\hat{\mathfrak{U}}/K$.

(II.6) Topologies de Grothendieck-Yoneda.

(II.6.0) Dans tout ce paragraphe, nous supposons donné un projecteur $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, tel que $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v})\colon \mathcal{O}(\boldsymbol{v}) \to \mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$ soit de Yoneda. Les notations sont toujours celles de (I.1.4 (iii)).

(II.6.1) Pour tout $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{U}})$, soit $\mathcal{U}_F$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^\wedge$, dont les objets sont $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) \cup \{F\}$. Le SR $\hat{F} = (\mathcal{O}^\wedge, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^\wedge}(-,-))|_{\mathcal{U}_F}$ sera appelé ***v*-Criplein de *F*.**

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, on écrira $\hat{X}$ au lieu de $(\boldsymbol{H}(\dot{X}))^\wedge$, et on dira que $\hat{X}$ est le ***v*-Criplein de *X*.** On note que $\hat{X}$ est le « vieux » Crible $\boldsymbol{h}_X$ (II.2.1.1 (3)) pensé dans $\mathcal{O}^\wedge$, i.e. $\hat{X}|_{\mathcal{O}} \cong \boldsymbol{h}_{\dot{X}}$.

Si $\varphi\colon F \to G$ est un $\hat{\mathcal{U}}$-morphisme, $\hat{\varphi}\colon \hat{F} \to \hat{G}$ sera le morphisme fort de SR, associé naturellement à φ.

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(Y, X)$, on pose $\hat{f}$ à la place de $(\boldsymbol{H}(\dot{f}))^\wedge$.

Par $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$ sera notée *la catégorie des **v**-Cripleins*, les morphismes étant déduits des $\hat{\mathcal{U}}$-morphismes.

Le foncteur

$$(-)^\wedge : \hat{\mathcal{U}} \to \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v}) \tag{II.6.1.1}$$

est par définition un isomorphisme. De ce foncteur on déduit de façon évidente

$$(-)^\wedge_X : \hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) \to \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X} \tag{II.6.1.2}$$

qui est un isomorphisme de catégories, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$.

A travers le foncteur (II.6.1.1) toutes les notations et définitions qu'on a introduites dans $\hat{\mathcal{U}}$, sont transportées dans $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$.

Par exemple, on a un endofoncteur de $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X}$, noté encore $\boldsymbol{im}_X$; $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})^{im}$ est la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$, constituée des Cripleins imaginés (II.5.1).

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, on a un diagramme commutatif de catégories et foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{cb}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}(\dot{X})) & \xrightarrow{(-)^\wedge_X} & \boldsymbol{Cb}(\boldsymbol{v}, \hat{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathcal{U}}/\boldsymbol{H}(\dot{X}) & \xrightarrow{(-)^\wedge_X} & \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X} \end{array} \tag{II.6.1.3}$$

(cf. (II.2.2)).

(II.6.2) REMARQUE. Les foncteurs $(-)^\wedge_X$ (II.2.2) et $(-)^\wedge_X$ (II.6.1) ne semblent pas justifiés en ce moment, mais ils seront en effet *indispensables*, quand on appliquera l'arithmétique fonctorielle (dans le sens de [AF]) aux Topologies de Grothendieck-Yoneda (cf. ch. III).

(II.6.3) Soit $\boldsymbol{t}$ une $\boldsymbol{v}$-Topologie ed $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$. Notons par $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$ la classe

$$\{(R^{im})^\wedge \to \hat{X} \mid R \in \boldsymbol{t}(\dot{X})\}$$

des $\boldsymbol{v}$-Cripleins dans $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X}$ associés aux $\boldsymbol{v}$-Cribles couvrants en $\dot{X}$, dans la Topologie $\boldsymbol{t}$.

(II.6.4) THÉORÈME. *Soit* $\boldsymbol{t}$ *une* $\boldsymbol{v}$*-Topologie. Les classes* $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, *vérifient les conditions suivantes:*

($\boldsymbol{t}^{im}1$) (*Stabilité par changement de base*). *Si* $\hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X}$ *est dans* $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$ *et si* $\hat{f}\colon \hat{Y} \to \hat{X}$ *est un* $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$*-morphisme, alors*

$$\hat{l}_{\hat{f}}\colon \hat{L}_{\hat{f}} = \hat{L} \times_{\hat{X}} \hat{Y} \to \hat{Y}$$

est dans $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{Y})$;

($\boldsymbol{t}^{im}2$) (*Caractère local*). *Soit* $\hat{l} \in \boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$ *et soit* $(l')^\wedge\colon (L')^\wedge \to \hat{X}$ *un* $\boldsymbol{v}$*-Criplein imaginé tel que, pour tout* $\hat{f}\colon \hat{Y} \to \hat{X}$ *dans* $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$, X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, $\hat{f} < \hat{l}$, *on ait* $(l')^\wedge_{\hat{f}} \in \boldsymbol{t}^{im}(\hat{Y})$. *Alors:*

$$(l')^\wedge \in \boldsymbol{t}^{im}(\hat{X}) .$$

($\boldsymbol{t}^{im}3$) *Pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, $\hat{X} \in \boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$.

($\boldsymbol{t}^{im}1$). Soit $L = R^{im}$, alors on sait que $\hat{L}_{\hat{f}} \cong (\hat{R} \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}})^{im}$ (II.5.8 (a')) et (II.6.1.3). Par ($\boldsymbol{t}1$), $\hat{R} \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}}$ est dans $\boldsymbol{t}(\dot{Y})$, d'où la conclusion.

($\boldsymbol{t}^{im}2$). Soit $L' = (R')^{im}$. Comme $(L')^\wedge \times_{\hat{X}} \hat{Y} = \big((R')\big)^\wedge \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}})^{im}$ (II.5.8) et que $(R' \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}))^{im} = S^{im}$, où $\hat{S} \in \boldsymbol{t}(Y)$, on a $R' \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}) = S$ (II.4.4) et on peut conclure par ($\boldsymbol{t}2$).

($\boldsymbol{t}^{im}3$). Comme $\hat{X}|_{\mathcal{O}} = h_{\dot{X}}$, on conclut par ($\boldsymbol{t}3$). Q.E.D.

(II.6.5) THÈORÉME. *Avec les notations de* (II.6.0) *et* (II.6.1), *soit, pour tout* $X \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{s}(\hat{X})$ *une classe de* $\boldsymbol{v}$*-Cripleins dans* $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X}$ *vérifiant les conditions* ($\boldsymbol{s}1$), ($\boldsymbol{s}2$) *et* ($\boldsymbol{s}3$) *déduites de* ($\boldsymbol{t}^{im}1$), ($\boldsymbol{t}^{im}2$) *et* ($\boldsymbol{t}^{im}3$) *de* (II.6.4) *en remplaçant partout les* $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{X})$ *par* $\boldsymbol{s}(\hat{X})$. *Alors, il existe une unique* $\boldsymbol{v}$*-Topologie* $\boldsymbol{t}$, *telle que* $\boldsymbol{t}^{im}(\hat{X}) = \boldsymbol{s}(\hat{X})$, *pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$.

En effet, posons $\boldsymbol{t}(\dot{X}) = \{(\boldsymbol{R}_l)^\wedge \hookrightarrow h_{\dot{X}} | \hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X}$ est dans $\boldsymbol{s}(\hat{X})\}$. Voyons que les $\boldsymbol{t}(\dot{X})$ définissent une $\boldsymbol{v}$-Topologie. Conservons les notations usuelles (II.1.1), (II.2.4).

($\boldsymbol{t}1$). $(\boldsymbol{R}_l)^\wedge \times_{h_{\dot{X}}} h_{\dot{Y}} \cong (\boldsymbol{R}_l \times_{\boldsymbol{H}(\dot{X})} \boldsymbol{H}(\dot{Y}))^\wedge \cong (\boldsymbol{R}(l_{\boldsymbol{H}(\dot{f})}))^\wedge$. Or, si $\hat{l}$ est dans $\boldsymbol{s}(\hat{X})$, on conclut par ($\boldsymbol{s}1$).

($\boldsymbol{t}2$) et ($\boldsymbol{t}3$) s'ensuivent par un raisonnement analogue à partir de ($\boldsymbol{s}2$) et ($\boldsymbol{s}3$). L'assertion d'unicité provient des formules (II.4.5).

(II.6.6) Dans les hypothèses générales de (II.6.0), on dira que la donnée, pour tout $\hat{X}$, d'une classe $\boldsymbol{s}(\hat{X})$ dans $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X}$, vérifiant ($\boldsymbol{s}1$), ($\boldsymbol{s}2$) et ($\boldsymbol{s}3$) de (II.6.5) définit une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$*-Topologie* $\boldsymbol{s}$, ou une $\boldsymbol{v}$*-Topologie de Grothendieck-Yoneda*. Les éléments de $\boldsymbol{s}(\hat{X})$ sont appelés *Cripleins* $\boldsymbol{s}$*-couvrants en* $\hat{X}$. Le couple $(\mathcal{O}^\wedge, \boldsymbol{s})$ sera appelé $\boldsymbol{v}$*-Siplein*.

(II.6.7) COROLLAIRE. *Il existe une correspondance biunivoque entre les $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologies et les $\boldsymbol{v}$-Topologies.*

(II.6.8) PROPOSITION. *Soit $\boldsymbol{s}$ une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologie et soient $\hat{l}$, $(l')^\wedge$ deux Cripleins imaginés de $\boldsymbol{Cp})\boldsymbol{v})/\hat{X}$.*

(1) *Si $\hat{l} < (l')^\wedge$, alors*

(1i) $\hat{l} \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$ *entraîne* $(l')^\wedge \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$;

(1ii) $\hat{l}, (l')^\wedge \in \boldsymbol{s}(\dot{X})$ *implique* $\hat{l} \times_{\hat{X}} (l')^\wedge \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$.

(2) *L'axiome* ($\boldsymbol{s}$2) *équivaut à la conjonction des axiomes*

($\boldsymbol{s}$2i) ($\boldsymbol{s}$2) *vaut pour* $(l')^\wedge < \hat{l}$;

($\boldsymbol{s}$2ii) $\hat{l} \in \boldsymbol{s}(X)$ *et* $\hat{l} < (l')^\wedge$ *impliquent* $(l')^\wedge \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$.

Tenu compte de (II.6.1.3) et (II.6.7), (1i) découle de (II.2.6 (a)) et de (II.4.5 (iv)). (1ii) découle de (II.2.6 (b)) et de (II.5.8 (f)); (2) s'ensuit de (II.2.7) et de (II.4.5 (iv)).

(II.7) Morphismes couvrants.

(II.7.0) En conservant les notations et les hypothèses générales de (II.6.0), fixons un $\boldsymbol{v}$-Siplein ($\mathcal{O}^\wedge$, $\boldsymbol{s}$).

(II.7.1) Soit $\hat{\varkappa}: \hat{H} \to \hat{K}$ un morphisme dans $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$. On dit que $\hat{\varkappa}$ est *couvrant,* si

(i) $\mathbf{1}_{\hat{K}}$ est imaginé (II.5.1),

(ii) pour tout $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$-morphisme $\hat{\varphi}: \hat{X} \to \hat{K}$, $\hat{\varkappa}_{\hat{\varphi}}: \hat{H} \times_{\hat{K}} \hat{X} \to \hat{X}$ est dans $\boldsymbol{s}(\hat{X})$.

(II.7.1.1) LEMME. *Si $\hat{\varkappa}: \hat{H} \to \hat{K}$ est couvrant, alors $\mathbf{1}_{\hat{H}}$ est imaginé.*

En effet, $\mathbf{1}_{\hat{K}}$ étant imaginé et les limites inductives étant universelles dans $\hat{\mathfrak{U}}$, on conclut par la condition (ii), les éléments de $\boldsymbol{s}(X)$ étant eux-mêmes imaginés.

(II.7.1.2) REMARQUE. Dans l'exemple des Topologies de Grothendieck-Verdier (II.1.1), à partir du projecteur $\boldsymbol{\dot{u}}: \underrightarrow{\mathfrak{U}} \to \underrightarrow{\mathfrak{U}}$ (I.1.2 (b)) la condition (II.7.1 (i)) est automatiquement vérifiée ([14], (10.2.1)) et on retrouve — dans ce cas — la définition classique de « morphisme couvrant » ([SGA IV, Exp. II, 5.2 (1)]).

(II.7.1.3) Avec les notations de (II.7.1), $\hat{\varkappa}$ est dit *bicouvrant* s'il est couvrant et si, en plus,

(iii) le morphisme canonique $\hat{\varepsilon}$: $(\mathrm{Ker}(\pi_1, \pi_2))^\wedge \hookrightarrow \hat{H} \times_{\hat{K}} \hat{H}$, associé aux projections $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$: $\hat{H} \times_{\hat{K}} \hat{H} \to \hat{H}$, est couvrant.

(II.7.2) PROPOSITION. *Avec les notations et hypothèses de* (II.7.0), *on a*:

(i) *tout* $\hat{l} \in \mathbf{s}(\hat{X})$ *est un morphisme bicouvrant,*

(ii) *tout monomorphisme* $\hat{\varkappa}$: $\hat{H} \to \hat{K}$, *qui est couvrant, est bicouvrant,*

(iii) *tout morphisme de* $\mathfrak{U}$ *couvrant et imaginé est bicouvrant,*

(iv) *si* $\hat{\lambda} \circ \hat{\varkappa}$: $\hat{H} \to \hat{K} \to \hat{L}$ *est couvrant, il en est de même de* $\hat{\lambda}$.

(i) est la conséquence de ($\mathbf{s}$1), (II.5.5 (b')) et (II.6.7). (ii) est trivial. (iii) s'ensuit de (II.5.16), compte tenu de (II.7.1.1). (iv) découle de (II.6.8 (1i)) et de (II.7.1 (ii)).

(II.8) Faisceaux.

(II.8.0) Conservons les notations et les hypothèses de (II.7.0).

(II.8.1) Un $\mathbf{v}$-Criplein $\hat{F}$ est un $\mathbf{s}$-*Faisceau* (resp. un $\mathbf{s}$-*Préfaisceau séparé*) si, pour tout $\hat{l}$: $\hat{L} \to \hat{X} \in \mathbf{s}(\hat{X})$, l'application canonique (II.6.1)

$$[\hat{l}, \hat{F}]: [\hat{X}, \hat{F}] \to [\hat{L}, \hat{F}]$$

est bijective (resp. injective).

(II.8.2) THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{O}^\wedge, \mathbf{s})$ *un* $\mathbf{v}$-*Siplein et* $\hat{F}$ *un* $\mathbf{v}$-*Criplein. Les énoncés suivants sont équivalents*:

(i) $\hat{F}$ *est un* $\mathbf{s}$-*Faisceau* (*resp. un* $\mathbf{s}$-*Préfaisceau séparé*);

(ii) *pour tout morphisme* $\hat{\varkappa}$: $\hat{H} \to \hat{K}$ *bicouvrant* (*resp. couvrant*), *l'application déduite* $[\hat{\varkappa}, \hat{F}]$: $[\hat{K}, \hat{F}] \to [\hat{H}, \hat{F}]$ *est bijective* (*resp. injective*).

(ii) implique trivialement (i), compte tenu de (II.7.2 (i)).
D'autre part, pour tout $\boldsymbol{H}(\dot{X}_\lambda) \to K \in \Delta(\mathbf{1}_K)$, le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} & \hat{H} \xrightarrow{\hat{\varkappa}} & \hat{K} \\ & \uparrow & \uparrow \\ \hat{H} \times_{\hat{K}} \hat{X}_\lambda = & \hat{H}_\lambda \xrightarrow{\hat{\varkappa}_\lambda} & \hat{X}_\lambda \end{array}$$

donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{[\hat{H}, \hat{F}]} \arrow[r, "{[\hat{\kappa}, \hat{F}]}"] \arrow[d] & {[K, \hat{F}]} \arrow[d] \\
{[\hat{H}_\lambda, \hat{F}]} \arrow[r, "{[\hat{\kappa}_\lambda, \hat{F}]}"] & {[\hat{X}_\lambda, \hat{F}]}
\end{tikzcd}$$

et comme $\varinjlim \hat{\kappa}_\lambda = \hat{\kappa}$ par universalité des limites inductives, on déduit (II.6.1) $\varprojlim [\hat{\kappa}_\lambda, \hat{F}] = [\hat{\kappa}, \hat{F}]$ ce qui entraîne (ii) en vertu des hypothèses.

(II.8.3) Proposition. *Dans la situation de* (II.8.0), *soit $\hat{F}$ un $\boldsymbol{v}$-Cripleín. Posons, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{V}})$,*

$$\boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X}) = \{\hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X} | \hat{l} \in \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})^{im}/\hat{X} \text{ tq. pour tout } \dot{f}\colon \dot{Y} \to \dot{X} \text{ dans } \hat{\mathcal{V}},$$
$$[\hat{l}_{\hat{f}}\colon \hat{F}]\colon [\hat{Y}, \hat{F}] \to [\hat{L}_{\hat{f}}, \hat{F}] \text{ est bijective (resp. injective)}\}\ .$$

Alors, les classes $\boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X})$ forment une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologie, notée $\boldsymbol{s}_{\hat{F}}$; c'est la plus fine $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologie telle que $\hat{F}$ soit un Faisceau (resp. un Préfaisceau séparé).

En effet, ($\boldsymbol{s}$1) et ($\boldsymbol{s}$3) sont triviaux. Démontrons ($\boldsymbol{s}$2i) et ($\boldsymbol{s}$2ii). Pour cela, soit $\hat{\delta}\colon \hat{l}' \to \hat{l}$ un morphisme de Cripleins imaginés fibrés sur $\hat{X}$. Considérons les deux implications suivantes:

(*a*) $\hat{l} \in \boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X})$ et $(\hat{l}')_{\hat{f}} \in \boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{Y})$, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(Y, X)$ tel que $f < l$, impliquent $\hat{l}' \in \boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X})$.

(*b*) $\hat{l}' \in \boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X})$ implique $\hat{l} \in \boldsymbol{s}_{\hat{F}}(\hat{X})$.

Pour les démontrer, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{[\hat{L}, \hat{F}]} \arrow[rr, "{[\hat{\delta}, \hat{F}]}"] & & {[\hat{L}', \hat{F}]} \\
& {[\hat{X}, \hat{F}]} \arrow[ul, "{[\hat{l}, \hat{F}]}"] \arrow[ur, "{[\hat{l}', \hat{F}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

On conclut si l'on démontre que $[\hat{\delta}, \hat{F}]$ est bijectif (resp. injectif). Soit $\dot{z}_\lambda\colon \dot{Z}_\lambda \to \dot{X}$ dans $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l)$. Observons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\hat{L}' \arrow[r, "\hat{\delta}"] & \hat{L} \arrow[r] & \hat{X} \\
\hat{L}' \times_{\hat{X}} \hat{Z}_\lambda \arrow[u] \arrow[r, "\hat{\delta}_\lambda"] & \hat{Z}_\lambda \arrow[u] \arrow[ur, "\hat{z}_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

De (II.5.16), on déduit que $\hat{\delta} = \varinjlim \hat{\delta}_\lambda$. Alors, sous nos hypothèses, les morphismes $[\hat{\delta}_\lambda, \hat{F}]$ sont bijectifs (resp. injectifs) et il en est de même donc pour $[\hat{\delta}, \hat{F}]$. Q.E.D.

(II.8.4) Corollaire. *Soit $\boldsymbol{F} = (\hat{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de Cripleins. Alors il existe une $\mathcal{O}^\wedge$-Topologie $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{F}}$ canonique associée à $\boldsymbol{F}$; c'est la plus fine, pour laquelle tout $\hat{F}_\lambda$ est un Faisceau (resp. un Préfaisceau séparé).*

(II.8.5) Corollaire. *Pour tout* $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}}^{\mathrm{Ob}})$, *soit* $\boldsymbol{s}(\hat{X})$ *une classe de Cripleins de* $\boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})$ *vérifiant l'axiome* ($\boldsymbol{s}1$). *Alors, un Criplein* $\hat{F}$ *est un Faisceau* (*resp. un Préfaisceau séparé*) *pour la* $\mathcal{O}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$*-Topologie engendré par les classes* $\boldsymbol{s}(\hat{X})$ *si et seulement si, pour tout* $\hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X}$ *dans* $\boldsymbol{s}(\hat{X})$,

$$[\hat{l}, \hat{F}]\colon\ ]\hat{X}, \hat{F}] \to [\hat{L}, \hat{F}]$$

est bijectif (*resp. injectif*).

(II.8.6) On appelle $\mathcal{O}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$-*Topologie canonique* la $\mathcal{O}^{\wedge}(\boldsymbol{v})$-Topologie, faisant de chaque $\hat{X}$ un faisceau dans le sens de (II.8.4). Notons la $\boldsymbol{can}(\boldsymbol{v})$, ou simplement $\boldsymbol{can}$.

(II.8.7) Proposition. *En conservant les notations précédentes, supposons que dans* $\dot{\mathcal{V}} \subset \mathcal{O}(\boldsymbol{v})$, *les limites inductives et les produits fibrés existent. Alors, un* $\hat{X}$*-Criplein imaginé* $\hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X}$ *est couvrant pour la Topologie canonique* (II.8.6) *si et seulement si, pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(Y, X)$,

$$\varinjlim_{\text{dans } \mathcal{V}} (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) \times_{\dot{X}} \dot{Y}) \cong \dot{Y}\,.$$

Si $\hat{l} \in \boldsymbol{can}(\hat{X})$, alors $[\hat{l}_{\hat{f}}, \hat{Z}]\colon [\hat{Y}, \hat{Z}] \to [\hat{L}_{\hat{f}}, \hat{Z}]$ est bijectif, pour tout $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{V}}}\ (\varinjlim \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) \times_{\dot{X}} \dot{Y}, \dot{Z}) &\cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{V}}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) \times_{\dot{X}} \dot{Y}, \dot{Z}) \cong \\ &\cong [L_f, \boldsymbol{H}(\dot{Z})] \cong [\boldsymbol{H}(\dot{Y}), \boldsymbol{H}(\dot{Z})] \cong \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{V}}}(\dot{Y}, \dot{Z})\end{aligned}$$

et le lemme de Yoneda dit que

$$\varinjlim (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) \times_{\dot{X}} \dot{Y}) \cong \dot{Y}$$

pour tout $\dot{f}\colon \dot{Y} \to \dot{X}$.

La réciproque est aussitôt vue en faisant le même raisonnement dans la direction opposée, compte tenu de (II.8.3).

(II.8.8) Corollaire. *Dans la situation de* (II.8.7), *si de plus les limites inductives sont universelles dans* $\mathcal{V}$, *alors* $\hat{l} \in \boldsymbol{can}(\hat{X})$ *si et seulement si* $\varinjlim_{\text{dans } \dot{\mathcal{V}}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_l) = \dot{X}$.

(II.9) Prétopologies.

(II.9.0) Quant à la définition et les notations classiques de prétopologie, nous renvoyons à [SGA IV, Exp. II, 1.3].

(II.9.1) Soit $f: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ admettant les produits fibrés.

(i) Pour toute prétopologie Q sur $\mathcal{D}$, on a une $\mathcal{C}$-prétopologie, notée $f^*(\mathsf{Q})$, qui est par définition la plus petite prétopologie qui contient toutes les familles $(u_\alpha: X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ telles que $\big(f(u_\alpha)\big)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{Q}}\big(f(X)\big)$.

(ii) Pour toute $\mathcal{C}$-prétopologie P, soit $f_*(\mathsf{P})$ la plus petite $\mathcal{D}$-prétopologie contenant les familles $\big(f(u_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$, $(u_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(X)$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(II.9.2) Remarques.

(*a*) Si f permute aux produits fibrés, alors $f^*(\mathsf{Q})$ est constitué des familles $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ telles que $\big(f(u_\alpha)\big)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{Q}}\big(f(X)\big)$.

(*b*) Pour toute $\mathcal{D}$-prétopologie Q, on a

$$f_* f^*(\mathsf{Q}) = \mathsf{Q}\,.$$

(*c*) Soit P une $\mathcal{C}$-prétopologie, alors la $\mathcal{C}$-prétopologie $f^* f_*(\mathsf{P})$ est appelée la *$\mathcal{C}$-prétopologie f-saturée* de P.

(II.9.3) Avec les notations et hypothèses de (II.8.0), supposons donnée une $\dot{\mathcal{V}}$-prétopologie P. Pour toute famille $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\dot{x}_\alpha: \dot{X}_\alpha \to \dot{X}$, $\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}\,(\dot{X})$, on considère le $\hat{X}$-Criplein $(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})^\wedge = \Big(\Big(\big(\bigcup_{\alpha \in A} \mathrm{Im}\big(\boldsymbol{H}(\dot{x}_\alpha)\big)\big)^{im}\Big)^\wedge \hookrightarrow \hat{X}$ (II.5.15).

Soit alors $\mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\hat{X}) = \{(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})^\wedge \,|\, \dot{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Cov}(\dot{X})\}$. On dira que les $\mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$ ainsi définis forment une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-*Prétopologie*, notée $\hat{\mathsf{P}}$, *associée à la $\dot{\mathcal{V}}$-prétopologie* P.

(II.9.4) Proposition. *Soit $\hat{\mathsf{P}}$ une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Prétopologie, déduite d'une $\dot{\mathcal{V}}$-prétopologie* P (II.9.3).

(a) *Pour tout $\dot{X} \in \dot{\mathcal{V}}$, soit $\mathbf{s}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$ la classe des $\hat{X}$-Cripleins $\hat{l}$ tels que $\hat{l} > (R_{\dot{\boldsymbol{x}}})^\wedge$ pour quelque $(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})^\wedge \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$. Alors, les $\mathbf{s}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$ forment une $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologie; c'est la plus petite contenant les* $\mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$.

(*b*) *Si $\dot{\boldsymbol{w}}$ est quasi-surjectif* (II.5.15), *alors un Criplein $\hat{F}$ est un Faisceau (resp. un Préfaisceau séparé) pour la $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologie $\mathbf{s}_{\mathsf{P}}$ si et seulement si, pour tout $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\dot{X})$, le diagramme*

$$[\hat{X}, \hat{F}] \xrightarrow{\varphi} \prod_{\alpha \in A} [\hat{X}_\alpha, \hat{F}] \underset{\chi}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha, \beta \in A} [\hat{X}_\alpha \times_{\hat{X}} \hat{X}_\beta, \hat{F}]$$

est exact (resp. φ est injectif).

(*a*) ($\mathbf{s}_{\mathsf{P}}$1) est la conséquence directe de (PT 1) [SGA IV, Exp. II, 1.3]. ($\mathbf{s}_{\mathsf{P}}$2): soit $\hat{l}' < \hat{l}$ et supposons que $(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})^\wedge < \hat{l}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}_\alpha: \dot{X}_\alpha \to \dot{X})_{\alpha \in A}$. Si

$(L'_{\boldsymbol{H}(\dot{x}_\alpha)})\hat{} \to \hat{X}_\alpha$ est dans $\boldsymbol{s}_{\mathsf{P}}(\hat{X}_\alpha)$, on a $\hat{l}'_{\hat{X}_\alpha} > (R_{\dot{\boldsymbol{y}}})\hat{}$, où $\dot{\boldsymbol{y}} = (\dot{y}_{\alpha,\beta})_{\beta\in B_\alpha} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}}(\dot{X}_\alpha)$. Alors, $\boldsymbol{R}_{L'_{\boldsymbol{H}(\dot{x}_\alpha)}} \supset \bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} \mathrm{Im}\big(\boldsymbol{H}(\dot{y}_{\alpha,\beta})\big)$ et donc $\boldsymbol{R}_{L'} \supset \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \beta_\alpha\in B_\alpha}} \mathrm{Im}\big(\boldsymbol{H}(\dot{x}_\alpha \circ \dot{y}_{\alpha,\beta_\alpha})\big)$ et, finalement, $\hat{l}'\colon \hat{L}' \to \hat{X} \in \boldsymbol{s}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$ par (PT2) (loc. cit). ($\boldsymbol{s}_{\mathsf{P}}$2 ii) et ($\boldsymbol{s}_{\mathsf{P}}$3) sont triviaux.

(*b*) Soit $(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})\hat{}$ dans $\boldsymbol{s}_{\mathsf{P}}(\hat{X})$, pour $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}_\alpha\colon \dot{X}_\alpha \to \dot{X})_{\alpha\in A}$: Considérons le diagramme:

$$[\hat{X}, \hat{F}] \xrightarrow{\Phi} [(R_{\dot{\boldsymbol{x}}})\hat{},\ \hat{F}] \cong \varprojlim [\hat{X}_\alpha, \hat{F}] \subset \prod_{\alpha\in A} [\hat{X}_\alpha, \hat{F}] \underset{\chi}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta\in A} [\hat{X}_\alpha \times_{\hat{X}} \hat{X}_\beta, \hat{F}] .$$

Vu (II.5.15) et compte tenu de (II.8.5), on trouve que Φ est bijectif (resp. injectif) si et seulement si $[\hat{X}, \hat{F}]$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(\psi, \chi)$ (resp. $[\hat{X}, \hat{F}] \to \prod\limits_{\alpha\in A} [\hat{X}_\alpha, \hat{F}]$ est injectif.) Q.E.D.

(II.9.5) LEMME. *Conservons toujours les notations générales de* (II.8.0). *Si $\dot{\boldsymbol{v}}$ est pleinement fidèle, si $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{U}})$ et si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, on a un isomorphisme fonctoriel en X et en F*:

$$F(X) \overset{\sim}{\rightarrow} [\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X), F] \overset{\sim}{\rightarrow} [\boldsymbol{H}(\dot{\boldsymbol{v}}(X)), F] .$$

En effet, on a toujours une application canonique fonctorielle en X et F:

$$\sigma\colon [\boldsymbol{H}(\dot{\boldsymbol{v}}(X)), F] \to F(X) .$$

D'autre part, si $\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X) \to F$ est une transformation naturelle, on a une application τ, définie par

$$\tau(\varphi)\colon \boldsymbol{H}(\dot{\boldsymbol{v}}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{V}}}(\dot{\boldsymbol{v}}(-), \dot{\boldsymbol{v}}(X)) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X) \xrightarrow{\varphi} F$$

qu'on vérifie être l'inverse de σ.

(II.9.6) Avec les notations de (I.1.4 (iii)), soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ et soit P une $\mathcal{U}$-prétopologie. On dira qu'un $\boldsymbol{v}$-Criplein $\hat{F}$ est un *Faisceau* (resp. un *Préfaisceau séparé*) *pour* P, si $\hat{F}$ l'est pour la $\mathcal{O}\hat{}(\boldsymbol{v})$-Topologie définie à partir de $\dot{\boldsymbol{w}}_*(\mathsf{P})$ ((II.9.3) et (II.9.4 *a*)).

(II.9.7) PROPOSITION. *Dans la situation de* (II.9.6), *soit $\hat{F}$ un $\boldsymbol{v}$-Criplein et Q une $\dot{\mathcal{V}}$-prétopologie. Supposons que $\dot{\boldsymbol{w}}$ soit pleinement fidèle, quasi-surjectif et qu'il commute aux produits fibrés.*

Alors, $\hat{F}$ est un Faisceau (*resp. Préfaisceau séparé*) *pour la $\mathcal{U}$-prétopologie $\dot{\boldsymbol{w}}^*(\mathsf{Q})$ si et seulement si, pour toute famille $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathrm{Cov}_{\dot{\boldsymbol{w}}^*(\mathsf{Q})}(X)$, le diagramme*

$$F(X) \to \prod_{\alpha\in A} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in A} F(X_\alpha \times_X X_\beta)$$

est exact.

En effet, on a toujours le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] & \prod\limits_{\alpha\in A} F(X_\alpha) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{\alpha,\beta\in A} F(X_\alpha \times_X X_\beta) \\
\left[(\dot{\boldsymbol{v}}(X))\hat{}\,, \hat{F}\right] \arrow[u] \arrow[r] & \prod\limits_{\alpha\in A}\left[(\dot{\boldsymbol{v}}(X_\alpha))\hat{}\,, \hat{F}\right] \arrow[u] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{\alpha,\beta\in A}\left[\dot{\boldsymbol{v}}(X_\alpha))\hat{}\times_{(\dot{\boldsymbol{v}}(X))\hat{}}(\dot{\boldsymbol{v}}(X_\beta))\hat{}\,, \hat{F}\right] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Mais, par (II.9.5), les flèches verticales sont des isomorphismes. D'autre part, $\dot{\boldsymbol{w}}_* \, \dot{\boldsymbol{w}}^*(\mathsf{Q}) = \mathsf{Q}$ $\big($II.9.2 $(b)\big)$; l'affirmation découle alors de $\big($II.9.4 $(b)\big)$ et de $\big($II.9.2 $(a)\big)$.

(II.9.8) Exemples.

(i) Soit T un espace topologique et $\mathcal{U} = \mathrm{Ouv}(T)$ la catégorie des ouverts de T. Soit $\dot{\boldsymbol{u}}\colon \underset{\rightarrow}{\mathcal{U}} \to \underset{\rightarrow}{\mathcal{U}}$ le projecteur de $\big($I.1.2 $(b)\big)$.

Pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, posons $\mathrm{Cov}(\dot{X}) = \{(\dot{X}_\alpha \subset \dot{X}_{\alpha\in A}) \mid \bigcup X_\alpha = X\}$. Ces classes donnent une $\mathcal{U}$-prétopologie; c'est ici l'exemple qui donne la théorie classique des faisceaux et des espaces topologiques.

(ii) Soit $\mathcal{U}$ la catégorie:

Cat_X^0 des X-schémas séparés, étales et de présentation finie;

ou

Cat_X^1 des X-schémas séparés et étales;

ou

Cat_X^2 des X-schémas étales
(resp. Cat_X^f des X-schémas séparés, étales et de présentation finie).

Soit $\dot{\boldsymbol{u}}\colon \underset{\rightarrow}{\mathcal{U}} \to \underset{\rightarrow}{\mathcal{U}}$ le projecteur de $\big($I.1.2 $(b)\big)$. On obtient des $\dot{\mathcal{U}}$-prétopologies bien connues en prenant, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, $\mathrm{Cov}(\dot{X})$ constitué par toutes les familles de $\dot{\mathcal{U}}$-morphismes $(\dot{X}_\alpha \xrightarrow{\dot{x}_\alpha} \dot{X})_{\alpha\in A}$ qui sont finies et surjectives $\Big($i.e. $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \dot{x}_\alpha(\dot{X}_\alpha) = \dot{X}\Big)$ (resp. surjectives) [1].

(iii) Reprenons l'exemple (II.3.2) des k-schémas. $\dot{\mathcal{V}}$ est alors la catégorie des k-schémas affines.

Soit $\mathbb{P}(f)$ une propriété de morphismes dans $\dot{\mathcal{V}}$, stables par changement de base affine et telle que $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{\dot{X}})$, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}})$. Alors on a la prétopologie suivante déterminée par

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(\dot{X}) = \{(\dot{x}_\alpha\colon \dot{X}_\alpha \to \dot{X})_{\alpha\in A} \mid \mathbb{P}(\dot{x}_\alpha) \text{ et } \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{Im}(\dot{x}_\alpha) = \dot{X}\}\,.$$

(II.10) *im*-Topologies.

(II.10.0) Conservons les notations de $\big($I.1.4 (iii)$\big)$ et de (II.4.3). Dans cette situation, étant donné un $\boldsymbol{v}$-Siplein $(\mathcal{O}^{\wedge}, \boldsymbol{s})$, soit $\boldsymbol{im}_{\hat{X}}\colon \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X} \to \boldsymbol{Cp}(\boldsymbol{v})/\hat{X}$ le projecteur strict défini dans (II.4.3) $\big($cf. aussi (II.4.5) et (II.6.1)$\big)$. Notons pour simplifier $\mathcal{O}(\boldsymbol{im}_{\hat{X}})$ par $\mathcal{O}_{\hat{X}}$, $\mathcal{U}(\boldsymbol{im}_{\hat{X}})$ par $\mathcal{O}'_{\hat{X}}$, $\mathcal{V}(\boldsymbol{im}_{\hat{X}})$ par $\mathcal{O}''_{\hat{X}}$:

Si

$$\begin{tikzcd} \hat{L} \arrow[rr, "\hat{l}"] \arrow[dr, "\hat{\lambda}"'] & & \hat{X} \\ & \hat{L}' \arrow[ur, "\hat{l}'"'] & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif dans $\mathcal{O}''_{\hat{X}}$, nous poserons

$$\begin{tikzcd} \mathring{L} \arrow[rr, "\mathring{l}"] \arrow[dr, "\mathring{\lambda}"'] & & \mathring{X} \\ & \mathring{L}' \arrow[ur, "\mathring{l}'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{au lieu de} \quad \begin{tikzcd} (\hat{F})^{\cdot} \arrow[rr, "(\hat{l})^{\cdot}"] \arrow[dr, "(\hat{\lambda})^{\cdot}"'] & & (\hat{X})^{\cdot} \\ & (L')^{\cdot} \arrow[ur, "(\hat{l}')^{\cdot}"'] & \end{tikzcd}$$

Aussi bien, nous noterons $\mathring{\mathcal{O}}_{\hat{X}}$ à la place de $(\mathcal{O}''_{\hat{X}})^{\bullet}$. Comme d'habitude, h°_{l} est le symbole pour le $\boldsymbol{im}_{\hat{X}}$-Crible local plein en $\mathring{l} \in \mathring{\mathcal{O}}_{\hat{X}}$:

(II.10.1) Avec les notations de (II.10.0), soient $\hat{l}\colon \hat{L} \to \hat{X}$ et $\hat{k}\colon \hat{K} \to \hat{X}$ deux objets de $\mathcal{O}''_{\hat{X}}$ et $m\colon \hat{M} \to \hat{X} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}'_{\hat{X}})$. Définissons un sous-Crible $\hat{l} * \hat{k}$ de h°_{l} par

$$\hat{l} * \hat{k}(\hat{m}) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{m}, \hat{l}) & \text{si } \boldsymbol{R}_m \subset \boldsymbol{R}_l \cap \boldsymbol{R}_k\,, \\ \emptyset & \text{autrement}\,. \end{cases}$$

Pour tout $\mathring{l}\colon \mathring{L} \to \mathring{X}$, on pose

(II.10.1.1) $\quad d_X \boldsymbol{s}(\mathring{l}) = \{R \subset h^{\circ}_{l} \mid R$ est un sous-Crible local en $\mathring{l}$ tel qu'il existe un $\hat{k} \in \boldsymbol{s}(X)$ de façon telle que $R \supset \hat{l} * \hat{k}\}$.

(II.10.2) Théorème. *Conservons les notations de* (II.10.0) *et* (II.10.1). *Pour tout* $\boldsymbol{v}$*-Siplein* $(\mathcal{O}^{\wedge}, \boldsymbol{s})$ *et pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, *les classes* $d_X\boldsymbol{s}(\mathring{l})$, $\mathring{l} \in \mathrm{Ob}(\mathring{\mathcal{O}}_{\hat{X}})$, *forment une* $\boldsymbol{im}_{\hat{X}}$*-Topologie.*

En effet, si $\mathring{\varphi}\colon \mathring{l}' \to l$ est un $\mathring{\mathcal{O}}_{\hat{X}}$-morphisme, pour tout $\hat{l} * \hat{k} \in d_X\boldsymbol{s}(\mathring{l})$, on a

(II.10.2.1) $$(\hat{l} * \hat{k}) \times_{h^{\circ}_{l}} h^{\circ}_{l'} = (\hat{l} * \hat{k})_{\mathring{\varphi}} \cong \hat{l}' * \hat{k}$$

ce qui suffit pour démontrer $(d_X\boldsymbol{s}1)$. Pour $(d_X\boldsymbol{s}2)$, soit $\hat{l} * \hat{k} \subset R \subset h^{\circ}_{l}$, et soit $R' \subset h^{\circ}_{l}$ tels que, pour tout $\mathring{\varphi}\colon \mathring{l}' \to l$, $\mathring{\varphi} < R$, $R'_{\varphi} \in d_X\boldsymbol{s}(\mathring{l}')$. Prenons $\mathring{l}' = \mathring{l} \times_{\mathring{X}} \mathring{k}$

et $\mathring{\varphi} = \mathring{\pi}: \mathring{l} \times_{\mathring{X}} \mathring{k} \to \mathring{l}$ la première projection. Vu que $\mathring{\pi} < R$, on sait qu'il existe un $\hat{f} \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$ tel que $R'_{\mathring{\pi}} \subset (\hat{l} \times_{\hat{X}} \hat{k}) * \hat{f}$. Alors, on voit que

$$\hat{l} * (\hat{k} \times_{\hat{X}} \hat{f}) \subset R' .$$

En effet,

$$\mathring{\pi} \circ [\overrightarrow{(\hat{l} \times_{\hat{X}} \hat{k}) * \hat{f}}(\hat{m}, \mathring{l} \times_{\mathring{X}} \mathring{k})] = \overrightarrow{\hat{l} * (\hat{k} \times_{\hat{X}} \hat{f})}(\hat{m}, \mathring{l});$$

en outre, $\hat{k} \times_{\hat{X}} \hat{f} \in \boldsymbol{s}(\hat{X})$ (II.6.8 (1ii)). Alors, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R' & \hookrightarrow & h_{\mathring{l}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R'_{\mathring{\pi}} & \hookrightarrow & h_{\mathring{l} \times_{\mathring{X}} \mathring{k}} \end{array}$$

termine la démonstration de $(d_X\boldsymbol{s}2)$. Pour $(d_X\boldsymbol{s}3)$, il suffit de vérifier que

$$\hat{l} * \mathbf{1}_{\hat{X}} \cong h_{\mathring{l}} .$$

(II.10.3) Le couple $(\mathcal{O}_{\hat{X}}\, d_X \boldsymbol{s})$ sera appelé le *$\boldsymbol{v}$-Site tangent au point $\hat{X}$ du Siplein* $(\mathcal{O}^\wedge, \boldsymbol{s})$.

(II.10.4) Remarque. (II.9.2) permet de passer d'un Siplein quelconque donné à la classe des Sites tangents aux points de $\dot{\mathcal{V}} \subset \mathcal{O}$. Dans un travail ultérieur, on montrera comment passer d'un Site à un autre de manière à pouvoir définir la catégorie des Sites. Dans ce contexte, on verra que, à tout morphisme $\dot{f}: \hat{Y} \to \hat{X}$, on peut associer un *morphisme de Sites*

$$d\dot{f}: (\mathcal{O}_{\hat{X}}, d_X \boldsymbol{s}) \to (\mathcal{O}_{\hat{Y}}, d_Y \boldsymbol{s}) .$$

Chapitre III

ESQUISSE D'UNE ARITHMÉTIQUE DES TOPOLOGIES

(III.0) Introduction au chapitre.

Conservons les notations de (II.2) et (II.6). Le fait que les $\boldsymbol{v}$-topologies et les $\mathcal{O}^\wedge(\boldsymbol{v})$-Topologies soient définies à l'aide de certains systèmes relationnels, les $\boldsymbol{v}$-Cribles et les $\boldsymbol{v}$-Cripleins, suggère de manière naturelle une *étude arithmétique*, dans le sens de [AF], de ces Topologies.

Nous nous bornons ici, pour la simplicité, à une esquisse d'une théorie qui sera reprise dans un travail ultérieur.

(III.1) Théorie additive.

(III.1.0) Dans ce numéro, on se donne un projecteur $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que la catégorie $\dot{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ (notations de (I.1.4 (iii))) admette un objet initial $\boldsymbol{i}$. C'est le cas, notamment, dans la situation (II.10) des Topologies tangentes.

(III.1.1) Soient $\hat{R} \subset h_{\dot{X}}$, $\hat{S} \subset h_{\dot{Y}}$ deux $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, $\dot{Y}$. Rappelons que $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont des $\mathcal{O}^{\star}(\boldsymbol{v})$-SR et a fortiori des $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$-SR, contenant le $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$-SR $\mathcal{U}_{\emptyset} = (\mathcal{U}, \emptyset)$.

Si le coproduit $\dot{X} \amalg_i \dot{Y}$ de $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ existe dans $\dot{\mathcal{U}}$, on peut former la somme $\hat{R} +^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ [AF, (3.2)]. Avec les notations de (loc. cit., (3.1) (*)) $\hat{R} +^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ est un $(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}))^{\amalg}-$ SR. Or, le foncteur canonique d'oubli $(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}))^{\amalg} \to \mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ permet de déduire de $\hat{R} +^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ un $\boldsymbol{v}$-Crible local en $\dot{X} \amalg \dot{Y}$ $(\simeq \dot{X} \amalg_i \dot{Y})$ que nous noterons $\hat{R} + \hat{S}$ par la suite.

(II.1.1.1) Exemple. Nous nous bornons, ici, à un exemple pour illustrer la théorie additive des $\boldsymbol{v}$-Cribles. Reprenons la situation de l'exemple (II.2.3) des structures relationnelles de type T. Alors, on voit aussitôt qu'ici, la somme générale de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux se particularise à la somme directe habituelle [11] de structures relationnelles.

(III.1.2) Ceci dit, soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$ deux $\boldsymbol{v}$-Topologies. Pour tout $\dot{Z} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, considérons la classe suivante de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{Z}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\dot{Z}) = \{\hat{R} \hookrightarrow h_{\dot{Z}} |\ &\text{il existe } \dot{X}, \dot{Y} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}}) \text{ et } \hat{S} \in \boldsymbol{s}(\dot{X}) \text{ et } \hat{T} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y}) \text{ tels que} \\ &\dot{Z} = \dot{X} \amalg \dot{Y} \text{ et } \hat{R} = \hat{S} + \hat{T}\}\ .\end{aligned}$$

La $\boldsymbol{v}$-Topologie engendrée par les classes $\boldsymbol{r}(Z)$ sera appelée *somme de* $\boldsymbol{s}$ *et et de* $\boldsymbol{t}$ et sera notée $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$.

(III.1.3) Proposition. *Dans les hypothèses de* (III.1.0) *et avec les notations de* (III.1.2), *soient* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}$ *des* $\boldsymbol{v}$-*Topologies. Alors*:

(i) $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}$;

(ii) $\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) + \boldsymbol{t}$;

(iii) *si* $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{u}$, *alors* $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} > \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}$;

(*) Si dans la catégorie $\mathcal{U}$, les coproduits n'existent pas, en général, on formera encore une catégorie $\mathcal{U}^{\amalg}$ (notation de [AF, (3.1)]) en ajoutant à $\mathcal{U}$ les coproduits qui existent, et le reste de la construction sera égal à ce qu'on a fait dans (loc. cit.).

(iv) $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = \sup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{ch}) > \sup(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$;

(v) $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{dis} = \boldsymbol{dis}$;

(vi) *pour tout* $n \geqq 1$, *en notant* $n\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} + \ldots + \boldsymbol{s}$ (*n fois*) *on a*: $(n+1)\boldsymbol{s} = n\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch} = \boldsymbol{s} + n\boldsymbol{ch}$.

(i) découle immédiatement de [AF, (3.3)] et des axiomes des $\boldsymbol{v}$-Topologies. (ii) s'ensuit de ce que, pour tous $\boldsymbol{v}$-Cribles $\hat{R}, \hat{S}, \hat{T}$ locaux en $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$, où l'on suppose exister $\dot{X} \amalg \dot{Y}$, $\dot{Y} \amalg \dot{Z}$, $\dot{X} \amalg \dot{Y} \amalg \dot{Z}$, on a $\hat{R} + (\hat{S} + \hat{T}) = (\hat{R} + \hat{S}) + \hat{T}$ [AF, (3.4)]. (iii) est immédiat. (v) découle de (iv). (vi): La première égalité est un cas particulier de (iv); la seconde suit de (iv) par récurrence sur $n \geqq 1$. Reste à démontrer (iv): $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} > \sup(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ est la conséquence de l'existence de l'objet initial $\boldsymbol{i} \in \dot{\mathcal{U}}$, vu la définition de somme (III.1.2). En outre, $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} > \sup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{ch})$ s'ensuit de (iii) et de (i). D'autre part, soit $\hat{R} \hookrightarrow h_{\dot{Z}}$ dans $\boldsymbol{r}(\dot{Z})$ (III.1.2), i.e. $\hat{R} = \hat{S} + \hat{T}$ pour $\hat{S} \in \boldsymbol{s}(\dot{X})$ et $\hat{T} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$ et pour une décomposition $\dot{Z} = \dot{X} \amalg \dot{Y}$. Alors, $\hat{S} + \hat{T} = (\hat{S} + h_{\dot{Y}}) \cap (h_{\dot{X}} + \hat{T})$, où $\hat{S} + h_{\dot{Y}} \in \boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}(\dot{Z})$ et $h_{\dot{X}} + \hat{T} \in \boldsymbol{ch} + \boldsymbol{t}(\dot{Z})$. Mais les $\boldsymbol{r}(\dot{Z})$ engendrent $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$ par définition, donc on a $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} < \sup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}, \boldsymbol{ch} + \boldsymbol{t}) = \sup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{ch})$. Q.E.D.

(III.1.4) De ce qui précède, on a par conséquent sur $\boldsymbol{v}$-Top (cf. Introduction) une structure de *semigroupe abélien* ($\boldsymbol{v}$-Top, $+$), *ordonné* par $>$, dont $\boldsymbol{dis}$ joue le rôle de l'élément « infini », en absorbant toutes les autres $\boldsymbol{v}$-Topologies (III.1.3 (v)). L'existence de cet élément ne permet donc aucun homomorphisme non trivial de semigroupes ($\boldsymbol{v}$-Top, $+$) $\to G$, où G est un groupe.

Par (III.1.3 (iv)), la $\boldsymbol{v}$-Topologie chaotique $\boldsymbol{ch}$ joue également un rôle important dans ($\boldsymbol{v}$-Top, $+$): en effet, on connaît ce semigroupe, si on connaît les sommes $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}$. Des autres propriétés « étranges » de $\boldsymbol{ch}$ seront données par la suite.

(III.1.5) A l'aide des sommes finies, on peut définir des « *sommes infinies* ». Pour toute suite $(\boldsymbol{s}_i)_{i=1,2,3,\ldots}$ de $\boldsymbol{v}$-Topologies, soit $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{s}_i = \sup_n \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$. En particulier, si tout $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}$, on pose $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{s} = \infty \boldsymbol{s}$. On a alors les sorites suivants

(III.1.6) PROPOSITION. *Dans les hypothèses générales de* (III.1.0) *et* (III.1.2), *soient* $(\boldsymbol{s}_i)_{i=1,2,3,\ldots}$, $(\boldsymbol{t}_k)_{k=1,2,3\ldots}$, *deux suites de* $\boldsymbol{v}$*-Topologies, alors*

(i) *pour tout* $m \geqq 1$, $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{s}_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{s}_i$,

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{s}_i + \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{t}_k = \sum_{i=1}^{\infty} (\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{t}_i)$.

Cette proposition est un corollaire du lemme suivant.

(III.1.7) LEMME. (i) *Soit* $(\boldsymbol{s}_i)_{i=1,2,3,\dots}$ *une suite dans* $\boldsymbol{v}$-Top *telle que* $\boldsymbol{s}_{i+1} \succ \boldsymbol{s}_i$, *pour tout* $i \geqq 1$, *et soit* $\boldsymbol{r}$ *dans* $\boldsymbol{v}$-Top, *alors*

$$\sup_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}_i) = \boldsymbol{r} + \sup_i(\boldsymbol{s}_i) .$$

(ii) *Si* $(\boldsymbol{t}_k)_{k=1,2,3,\dots}$ *est une autre suite dans* $\boldsymbol{v}$-Top, *satisfaisant à la même condition que* $(\boldsymbol{s}_i)_{i=1,2,3,\dots}$, *alors*

$$\sup_i(\boldsymbol{s}_i) + \sup_k(\boldsymbol{t}_i) = \sup_i(\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{t}_i) .$$

(i): Il est clair que $\boldsymbol{r} + \sup_i(\boldsymbol{s}_i) \succ \sup_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}_i)$ et l'autre majoration descend de ce que $\big(\sup_i(\boldsymbol{s}_i)(\dot{Z})\big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{s}_i(\dot{Z})$, pour tout $\dot{Z} \in \mathrm{On}(\dot{\mathcal{U}})$. (ii) est immédiat à partir de (i).

(III.1.8) Notons par $\amalg_\infty$ la $\boldsymbol{v}$-Topologie engendrée par les familles suivantes de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{Z}$:

$$\{\hat{R} \subset h_{\dot{Z}} \mid \text{il existe } \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}}) \text{ tels que } \hat{R} = h_{\dot{X}_1} + h_{\dot{X}_2} + \dots + h_{\dot{X}_n}\} .$$

(III.1.9) PROPOSITION. *Avec les hypothèses et notations de* (III.1.8), (III.1.0), (III.1.2), *soit* $1 \leqq n \leqq \infty$, $1 \leqq m \leqq \infty$ (*), *et soient* $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ *dans* $\boldsymbol{v}$-Top, *alors*

(i) $\infty \boldsymbol{ch} = \amalg_\infty$;

(ii) $n(\infty \boldsymbol{ch}) = \infty \boldsymbol{ch}$;

(iii) $(n+1)\,\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} + n\boldsymbol{ch}$; *en particulier* $\infty \boldsymbol{t} = t + \amalg_\infty$;

(iv) $n\boldsymbol{s} + m\boldsymbol{t} = m\boldsymbol{s} + n\boldsymbol{t} = nm\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{s} + nm\boldsymbol{t} = nm(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t})$.

Supposons (i) démontré. Pour (iii), il reste à vérifier le cas $n = \infty$ (III.1.3 (vi)); alors (III.1.3 (ii), (iv), (vi)) et (III.1.7 (i)) donnent les majorations suivantes pour tout $1 < p < \infty$:

$$\sup(p\boldsymbol{t} + \boldsymbol{ch}, \infty \boldsymbol{ch}) = \sup(\boldsymbol{t} + p\boldsymbol{ch}, \infty \boldsymbol{ch}) =$$
$$= \sup\big(\boldsymbol{t} + (p-1)\boldsymbol{ch} + \boldsymbol{ch}, \infty \boldsymbol{ch} + \boldsymbol{ch}\big) = \boldsymbol{t} + \infty \boldsymbol{ch} \prec \infty \boldsymbol{t}$$

(*) Comme d'habitude, on pose $\infty + n = n + \infty = \infty$ et $\infty \cdot n = n \cdot \infty = \infty$, pour tout $1 \leqq n \leqq \infty$.

d'où (iii), car $\sup_p(\sup(p\boldsymbol{t}+\boldsymbol{ch}, \infty\boldsymbol{ch})) = \infty\boldsymbol{t}$. (ii) est clair à partir de (iii). Pour (iv), il suffit de voir que $m\boldsymbol{s} + n\boldsymbol{t} = mn\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$ (compte tenu de (iii)).

Supposons d'abord $m < \infty$. Alors, $m\boldsymbol{s} + n\boldsymbol{t} = mn\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$ se démontre par récurrence sur m.

Si $m = \infty$, on a

$$\infty\boldsymbol{s} + n\boldsymbol{t} = \sup_{\infty > m}(m\boldsymbol{s} + n\boldsymbol{t}) = \sup_{\infty > m}(mn\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) = \infty\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t},$$

d'où (iv).

Reste à démontrer l'assertion (i). Or, il résulte des définitions que $n\boldsymbol{ch} < \amalg_\infty$ pour tout $n < \infty$, d'où $\infty\boldsymbol{ch} < \amalg_\infty$. D'autre part, pour tout $\hat{R} \in \amalg_\infty(\dot{X})$, $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{U}})$, il existe un n tel que $\hat{R} \in n\boldsymbol{ch}(\dot{X})$, par construction de $\amalg_\infty$; d'où $\infty\boldsymbol{ch} > \amalg_\infty$, ce qui termine la démonstration.

(III.1.10) Exemple. Soit T un espace topologique, $\mathrm{Ouv}(T)$ la catégorie des ouverts de T et $\boldsymbol{t}$ la $\dot{\boldsymbol{u}}$-Topologie canonique (II.9.8 (ii)) sur $\mathcal{O}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \overrightarrow{\mathrm{Ouv}(T)}$. Il est alors facile de voir que $n\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}$, pour tout $1 \leqq n \leqq \infty$. Il résulte donc de (III.1.9) que le semigroupe $(\boldsymbol{t})$ (resp. $(\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{ch})$) engendré par $\boldsymbol{t}$ (resp. somme des semigroupes engendrés par $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{ch}$) sont égaux, d'où la chaîne

$$(\boldsymbol{ch}) \subset (\boldsymbol{t}) \subset (\boldsymbol{v}\text{-Top}, +).$$

Dans cette situation, on a toujours $\boldsymbol{t} > \infty\boldsymbol{ch}$, en outre

(III.1.11) Proposition. *On a* $\boldsymbol{t} = \infty\boldsymbol{ch}$ *si et seulement si* T *est noethérien.*

Considérons la $\dot{\boldsymbol{u}}$-Topologie $\amalg^\infty$ déduite de la $(\mathrm{Ouv}(T))^\bullet$-prétopologie $\mathsf{P}_\amalg$ donnée par

$$\mathrm{Cov}_{\mathsf{P}_\amalg}(\dot{X}) = \{(\dot{X}_i \to \dot{X})_{i=1,\dots,n} \mid \bigcup_{i=1}^{n} \dot{X}_i = \dot{X}\,,\ 0 \leqq n < \infty\},\ \text{(II.9.4 }(a))\text{ et (II.6.7).}$$

Il est facile de voir que $\amalg^\infty = \amalg_\infty$ (III.1.8), et donc (III.1.9 (i)) $\amalg^\infty = \infty\boldsymbol{ch}$. Ceci étant, soit T noethérien. D'après ce qu'on vient de voir, il suffit de montrer que $\boldsymbol{t} < \amalg^\infty$. Or, pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ouv}(T)^\bullet)$, pour tout recouvrement $(\dot{X}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\dot{X}$, si $(\dot{X}_{\alpha_i})_{i=1,\dots,n}$ est une sous-famille finie de $(\dot{X}_\alpha)_{\alpha \in A}$ qui recouvre $\dot{X}$, alors $(\dot{X}_{\alpha_i})_{i=1,\dots,n} \in \mathrm{Cov}_{\mathsf{P}_\amalg}(\dot{X})$ et le sous-foncteur de $\mathrm{Hom}(-, X)$ qu'on lui associe est contenu dans celui associé à $(\dot{X}_\alpha)$, d'où $\boldsymbol{t} < \amalg^\infty$.

Réciproquement, supposons $\boldsymbol{t} = \infty\boldsymbol{ch} = \amalg^\infty$. On sait qu'il suffit de montrer que chaque ouvert $\dot{X}$ de $(\mathrm{Ouv}(T))^\bullet$ est quasi-compact. Pour cela, soit $(\dot{X}_\alpha)$ un recouvrement de $\dot{X}$. Par définition de $\amalg^\infty$ (II.9.4 (a)), on trouve un recouvrement fini $(\dot{X}'_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\dot{X}$ (élément de $\mathrm{Cov}_{\mathbf{P}_{\mathrm{II}}}(\dot{X})$) tel que le sous-foncteur de $\mathrm{Hom}(-, X)$ qu'on lui associe soit contenu dans celui associé à $(\dot{X}_\alpha)$. Mais alors, en évaluant les foncteurs aux arguments X'_i, on trouve bien une sous-famille $(\dot{X}_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$ de $(\dot{X}_\alpha)$ recouvrant $\dot{X}$, d'où la proposition.

(III.1.12) PROBLÈMES OUVERTS. Il est clair que $\boldsymbol{ch} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$ implique $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t} = \boldsymbol{ch}$ (III.1.3), donc une telle décomposition est impossible dans tous les cas « raisonnables ».

Disons que $\boldsymbol{s}$ est irréductible si $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$ est impossible. Or, soit $\boldsymbol{t} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{t}_i$ une décomposition en éléments irréductibles $\boldsymbol{t}_i$: Si $\boldsymbol{t}_1 < \boldsymbol{t}_j$, on peut remplacer cette somme par $\boldsymbol{ch} + \sum_{i=2}^{k} \boldsymbol{t}_i$ (III.1.3 (iv)), en supposant $\boldsymbol{ch}$ irréductible. Supposons donc $\boldsymbol{t}_1 = \ldots = \boldsymbol{t}_l = \boldsymbol{ch}$ et les autres $\boldsymbol{t}_i$ deux à deux incomparables. Sous quelles « bonnes » conditions, une telle décomposition

$$\boldsymbol{t} = l\boldsymbol{ch} + \sum_{i=l+1}^{k} \boldsymbol{t}_i$$

est-elle *unique* (à permutations près)?

(III.2) Théorie multiplicative.

(III.2.0) Dans ce numéro, on fixe un projecteur $\boldsymbol{v}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, et on suppose que $\mathcal{C}$ contienne un élément final $\boldsymbol{e}$ qui est laissé fixe par $\boldsymbol{v}$, en d'autres mots, avec les notations usuelles, on suppose que $\dot{\boldsymbol{e}} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathcal{V}}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}))$ est final dans $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ (ou dans $\dot{\mathcal{V}}$, ce qui revient au même). Notons qu'une telle situation intervient de façon naturelle dans la considération des Topologies tangentes $d_X\boldsymbol{s}$ d'une Topologie quelconque $\boldsymbol{s}$ (II.10.3).

(III.2.1) Soient $\hat{R} \subset h_{\dot{X}}$, $\hat{S} \subset h_{\dot{Y}}$ deux $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$, $\dot{Y}$; ce sont des $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$-SR qui contiennent le sous-$\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$-SR $\mathcal{U}_\emptyset$ (III.1.1).

Si le produit $\dot{X} \times_{\dot{e}} \dot{Y}$ existe, on peut former le produit $\hat{R} \cdot^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ défini dans [AF, (4.1)]. Avec les notations de (loc. cit.) (*) $\hat{R} \cdot^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ est un $(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}))^{\Pi}$-SR. Le foncteur canonique d'oubli $(\mathcal{O}(\boldsymbol{v}))^{\Pi} \to \mathcal{O}(\boldsymbol{v})$ permet de déduire de $\hat{R} \cdot^{\mathcal{U}_\emptyset} \hat{S}$ un $\boldsymbol{v}$-Crible local en $\dot{X} \times_{\dot{e}} \dot{Y}$ $(= \dot{X} \times \dot{Y})$ que nous noterons $\hat{R} \cdot \hat{S}$ par la suite.

(*) Si dans la catégorie $\mathcal{U}$, les produits n'existent pas en général, on formera encore une catégorie $\mathcal{U}^{\Pi}$ ([AF, (4.1)]) en ajoutant à $\mathcal{U}$ les produits qui existent, le reste de la construction sera égal à ce qu'on a fait dans (loc. cit.).

(III.2.1.1) EXEMPLE. Reprenons la situation de (II.2.3) et de (III.1.1.1). Alors le produit direct de structures relationnelles de type T [11] n'est autre que le produit des $\boldsymbol{v}(\varrho)$-Cribles locaux, en tenant compte de l'identification (II.2.3).

(III.2.2) Supposons données deux $\boldsymbol{v}$-Topologies $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$. Pour tout $\dot{X} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{V}})$, on considère la classe suivante de $\boldsymbol{v}$-Cribles locaux en $\dot{X}$:

$$\boldsymbol{r}(\dot{Z}) = \{\hat{R} \subset h_{\dot{Z}} \mid \text{il existe } \dot{X},\, \dot{Y} \in \mathrm{Ob}(\dot{\mathfrak{V}}) \text{ et } \hat{S} \in \boldsymbol{s}(\dot{X}) \text{ et } \hat{T} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y}) \text{ tels que } \dot{Z} = \dot{X} \times \dot{Y} \text{ et } \hat{R} = \hat{S} \cdot \hat{T}\} .$$

L'existence d'un objet final $\boldsymbol{e}$ dans $\dot{\mathfrak{V}}$ implique d'abord que $\boldsymbol{r}(\dot{Z})$ contient $\boldsymbol{s}(\dot{Z})$ et $\boldsymbol{t}(\dot{Z})$. Nous noterons $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}$ la $\boldsymbol{v}$-Topologie engendrée par les classes $\boldsymbol{r}(\dot{Z})$, et nous l'appellerons *produit de* $\boldsymbol{s}$ *et de* $\boldsymbol{t}$.

(III.2.3) LEMME. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t} = \sup(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) .$$

En effet, d'après (III.2.2), $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}$ est plus fin que $\sup(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. Pour l'autre inclusion, soit $\dot{Z} = \dot{X} \times \dot{Y}$ et notons $\dot{p}\colon \dot{Z} \to \dot{X}$, $\dot{q}\colon \dot{Z} \to \dot{Y}$ les projections. Si $\hat{S} \in \boldsymbol{s}(\dot{X})$ et $\hat{T} \in \boldsymbol{t}(\dot{Y})$, on a

$$(R_{\boldsymbol{H}(\dot{p})})^{\wedge} \cap (S_{\boldsymbol{H}(\dot{q})})^{\wedge} = \hat{R} \cdot \hat{S} .$$

Mais comme les $\boldsymbol{v}$-Cribles de cette forme engendrent $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}$, et qu'ils appartiennent évidemment à $\sup(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$, le lemme est démontré.

(III.2.4) COROLLAIRE. *Dans les hypothèses générales de* (III.2.0), *soient* $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$ *des* $\boldsymbol{v}$*-Topologies.*

(i) $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}$;

(ii) $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{s}$;

(iii) $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{t}$;

(iv) *si* $\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{t}$ *et* $\boldsymbol{s} \succ \boldsymbol{u}$, *alors* $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} \succ \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}$;

(v) $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{ch} = \boldsymbol{s}$ (i.e. $\boldsymbol{ch}$ *est neutre pour la multiplication*);

(vi) $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{dis} = \boldsymbol{dis}$ (i.e. $\boldsymbol{dis}$ *absorbe toute Topologie*).

(III.2.5) REMARQUE. On peut parler du *monoïd multiplicatif, abélien, ordonné* (par $\succ$) des $\boldsymbol{v}$-Topologies.

En général, les affirmations (III.2.4 (i), (v), (vi)) impliquent bien que ($\boldsymbol{v}$-Top, $\cdot$) n'admet aucun homomorphisme non-trivial de monoïds ($\boldsymbol{v}$-Top, $\cdot$) $\to G$, G étant un groupe. Toutefois, on a le résultat structural suivant (valable pour tout monoïd avec tous les éléments idempotents [10, thm. 1]):

(III.2.6) PROPOSITION. *Le monoïd multiplicatif* $\boldsymbol{v}$-Top *défini dans* (III.2.2) *a la propriété de raffinement: si* $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$ *et* $Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_l$ *sont deux décompositions directes du monoïd* ($\boldsymbol{v}$-Top, $\cdot$), *il existe une famille* $(R_{\varkappa,\lambda})_{\substack{1\leq \varkappa\leq k\\ 1\leq\lambda\leq l}}$ *de monoïds telle que* $P_\varkappa \cong R_{1,\varkappa} \times \ldots \times R_{l,\varkappa}$ *et* $Q_\lambda \cong R_{\lambda,1} \times \ldots \times R_{\lambda,k}$, *pour tout*

$\varkappa = 1, \ldots, k$ *et* $\lambda = 1, \ldots, l$.

(III.2.7) Pour terminer ce chapitre, donnons quelques résultats concernant les structures additives (III.1) et multiplicatives (III.2) à la fois. Nous ferons donc sur le projecteur $\boldsymbol{v}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ les hypothèses soit de (III.1.0) soit de (III.2.0), en gardant les notations respectives.

(III.2.8) PROPOSITION. *Avec les hypothèses et notations de* (III.2.7), *soient* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ *des* $\boldsymbol{v}$*-Topologies et* $1 \leqq n \leqq \infty$, $1 \leqq m \leqq \infty$; *alors*

(i) $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} > \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}$;

(ii) $(n+1)\boldsymbol{s}\cdot(m+1)\boldsymbol{t} = n\boldsymbol{s} + m\boldsymbol{t}$;

(iii) $(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{r}\cdot 2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} < \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}$;

(iv) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t})\cdot(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t})$;

(v) $n\boldsymbol{s}\cdot m\boldsymbol{t} = m\boldsymbol{s}\cdot n\boldsymbol{t}$, *si* $m = n = 1$ *ou si* $n, m > 1$;

(vi) *si* $n, m > 2$, $n\boldsymbol{s}\cdot m\boldsymbol{t} = (n+m-3)(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t})$.

(i) et (ii) sont immédiats à partir de (III.1.3 (iv)), (III.1.9 (iii)), (III.2.3). (iv) résulte de ce que $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{ch}$, si $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{s}$ (III.1.3 (iv)) et de (III.2.3). (v) et (vi) découlent aussitôt de (ii) et de (III.1.9 (iii)). (iii) résulte de (ii) et de (III.2.3).

(III.2.9) REMARQUE. En général, $(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{t}$ est *strictement* moins fin que $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}$. Pour le voir, il suffit de prendre $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} = \boldsymbol{ch}$, $\boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{ch}$; en général, $3\boldsymbol{ch} \neq 4\boldsymbol{ch}$.

De même, (v) de (III.2.8) est *faux*, si $n > 1$, $m = 1$, car on aurait $2\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\cdot 2\boldsymbol{ch} = \boldsymbol{t}$ pour tout $\boldsymbol{t} > 2\boldsymbol{ch}$, en particulier pour $\boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{ch}$, on aurait $4\boldsymbol{ch} = 2\boldsymbol{ch}$ ce qui est absurde, en général. Donnons, en effet, un exemple où $3\boldsymbol{ch} \neq 4\boldsymbol{ch}$. Il suffit de prendre l'exemple (III.1.10). Soit T noethérien.

Alors $\infty \boldsymbol{ch} = \boldsymbol{t}$. Si $3\boldsymbol{ch} = 4\boldsymbol{ch}$, alors $3\boldsymbol{ch} = 4\boldsymbol{ch} = \ldots = n\boldsymbol{ch}$, pour tout $n \geqq 3$, donc $\boldsymbol{t} = 3\boldsymbol{ch}$. Mais cela est absurde. D'ailleurs, on aura dans beaucoup de cas l'inégalité $\boldsymbol{ch} \lneqq 2\boldsymbol{ch}$. En effet, on trouve dans [AF] la Proposition 8 qui donne un bon critère pour ladite inégalité. Les conditions (a) à (f) de loc. cit. sont notamment vérifiées dans l'exemple (II.3.2) (où l'on pensera les Cribles *non* dans $\mathcal{O}(v)$, mais dans $\boldsymbol{Sch}/k$ (qui contient $\mathcal{O}(\boldsymbol{v})$!). Nous laissons au lecteur les détails de ce fait.

Pervenuto in Redazione il 15 dicembre 1975.

RIASSUNTO

Il punto di partenza di questo lavoro è l'interpretazione delle topologie di Grothendieck nel linguaggio dei sistemi relazionali (cfr. [5]); ciò permette uno studio aritmetico di tali topologie. Attraverso nuove tecniche, qui introdotte, si ottengono risultati non privi di interesse, tra i quali una caratterizzazione degli spazi topologici noetheriani, ed ulteriori strutture topologiche di tipo locale (siti tangenti), per le quali vengono dimostrate numerose proprietà. Vengono, infine, date alcune applicazioni alla teoria degli schemi, utilizzando il funtore inviluppo affine.

SUMMARY

The starting point of this paper is the interpretation of Grothendieck's topologies in the language of relational systems (cfr. [5]); this permits an arithmetical study of these topologies. By applying new techniques introduced here, we have achieved interesting results. These include a new characterization of Noetherian topological spaces, and further topological structures of local type (tangent sites) for which we have shown numerous properties. Finally, we have used the affine-envelope functor to illustrate some applications to the theory of schemes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, *Grothendieck topologies*, A.M.S. Studies.

[2] M. Artin, *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*, Univ. Montréal (1972).

[3] I. Bucur - A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, Wiley - Interscience (1968).

[4] A. H. Clifford - G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Math. Surveys n. 7, A.M.S. (1961).

[5] (cité AF) M. Fontana - G. Mazzola, *Arithmétique fonctorielle*, Rend. Mat. (1975).

[6] G. Grätzer, *Universal Algebra*, Van Nostrand (1968).

[7] (cité EGA) A. Grothendieck - J. Dieudonnè, *Eléments de Géométrie Algébrique*, I.H.E.S., 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[8] (cité SGA IV) A. Grothendieck - J. L. Verdier, *Séminaire de Géométrie Algebrique*, Springer L.N., **269** (1972).

[9] M. Kühnrich, *Eine Mengenlehre mit Superklassen. Theory sets topology*, Collection Paper Honour F. Hausdorff (1972), pp. 333-353.

[10] R. McKenzie, *A method for obtaining refinement theorems, with an application to direct products of semigroups*, Algebra Univ., **2** (1972), pp. 324-338.

[11] R. McKenzie, *Cardinal multiplication of structures with a reflexive relation*, Fund. Math., **70** (1971), pp. 59-101.

[12] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface* Annals of Math. Studies, n. 59 (1966).

[13] (cité PM) B. Russel - A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, vol. 2, part IV (Relational arithmetic), Cambridge Univ. Press (1912).

[14] H. Schubert, *Categories*, Springer.