COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 22(1), 9-27 (1994)

QUELQUES PROPRIETES DES CHAINES D'IDEAUX DANS LES ANNEAUX $A + XB[X]$

Marco Fontana

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"
00185 Roma, Italia

Lahoucine Izelgue et Salah Kabbaj

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Univ. S. M. Ben Abdellah
Fès, Maroc

§ 0. INTRODUCTION

Soient $A \subseteq B$ une extension d'anneaux commutatifs intègres et X une indéterminée sur B.

Ce papier traite de l'étude de certaines propriétés relatives au spectre des constructions de la forme $R := A + XB[X]$. Les résultats énoncés généralisent (et mettent en evidence les limites de) ceux déjà établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D^{(S)} := D + XD_S[X]$ longuement étudiés dans [3], [9], [13], [14], [15], [18]. Il consiste en trois paragraphes. Le premier est consacré à l'examen du transfert de la notion de S-domaine fort (universel). On établit, entre autre, le résultat fondamental suivant : *l'anneau $R = A + XB[X]$ est un S-domaine fort universel et l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ est incomparable si et seulement si A et B sont des S-domaines forts universels et $A \longrightarrow B$ est résiduellement algébrique.*

Le deuxième paragraphe est consacré à l'examen du transfert de la caténarité (universelle) de A et $B[X]$, à l'anneau $R = A + XB[X]$. Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant: *l'anneau R est universellement caténaire et l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ est incomparable si et seulement si A et B sont universellement caténaires, l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ est résiduellement algébrique et* $\mathrm{ht}_B\, \mathfrak{P} = \mathrm{ht}_A\, (\mathfrak{P} \cap A)$ *pour tout* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$.

Comme application intéressante, au troisième paragraphe, nous sommes en mesure d'enrichir les classes d'anneaux, relatives aux notions précédemment étudiées, par de nouveaux exemples qui étaient, jusque là, en dehors du champ des constructions étudiées. Nous fournirons ainsi des exemples d'illustration pour les résultats établis aux Paragraphes 1 et 2 . Nous donnerons, de même, des contre-exemples montrant que, sous leurs formes classiques, certains des résultats établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D + XD_S[X]$ ne s'étendent pas au cas plus général des constructions de la forme $R = A + XB[X]$. Les exemples fournis sont aussi des constructions B, I, D qui ne sont cependant ni simples ni presque simples dans la terminologie de [7] et [8], ni issues d'algèbres de type fini [4] .

§1. TRANSFERT DE LA NOTION DE S-DOMAINE FORT

Un anneau A est appelé *S-domaine* si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur 1 , l'idéal premier $\mathfrak{p}[X]$ est de hauteur 1 dans $A[X]$. L'anneau A est appelé *S-domaine fort* si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est un S-domaine [16, p. 26]. Enfin, A est dit *S-domaine fort universel* si pour tout entier naturel $n \geq 0$, l'anneau des polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ est un S-domaine fort [18]. Parmi les exemples de S-domaines forts universels citons les anneaux noethériens [16], les anneaux de Prüfer [18] et certains produits fibrés particuliers [4], [5], [7], [8], [13] et [15] .

Ce paragraphe est consacré à l'étude des notions pré-citées dans les constructions de la forme $R = A + XB[X]$. Quelques résultats de transfert sont énoncés, généralisant - et mettant en évidence les limites de - ceux déjà établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D^{(S)} = D + XD_S[X]$. A la suite de quoi, nous serons en mesure, au Paragraphe 3, de fournir des applications et des exemples originaux.

THEOREME 1.1. *Soient* $A \subsetneq B$ *une extension d'anneaux,* X *une indéterminée sur* B *et* $R = A + XB[X]$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est un S-domaine ;*

(ii) *B est algébrique sur A ou* $\mathrm{ht}_R\, XB[X] > 1$.

DEMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que B ne soit pas algébrique sur A . Soient z un élément de B transcendant sur A et Y une autre indéterminée sur B . L'idéal premier $< Y + z >$ est un supérieur de (0) dans $B[Y]$ et il rencontre $A[Y]$ en (0) (autrement, z serait algébrique sur A). Nous avons alors, dans $R[Y] = A[Y] + XB[X][Y]$, la chaine distincte d'idéaux premiers :
$(0) \subset < Y + z > B[Y][X] \cap R[Y] \subset XB[Y][X]$ [12, Démonstration du Lemme 1.3] . D'où, $\mathrm{ht}_{R[Y]}\, XB[X][Y] = \mathrm{ht}_{R[Y]}\, XB[Y][X] > 1$. Or R est un S-domaine, par conséquent, $\mathrm{ht}_R\, XB[X] > 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Il s'agit de montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} = 1$ entraine que $\mathrm{ht}_{R[Y]}\, \mathfrak{p}[Y] = 1$. Deux cas sont possibles :

Cas 1 : $X \in \mathfrak{p}$. Alors $XB[X] \subseteq \mathfrak{p}$ et nécessairement $\mathfrak{p} = XB[X]$. Par conséquent, $\mathrm{ht}_R\, XB[X] = 1$. Donc, B est algébrique sur A . De même que $B[Y]$ est algébrique sur $A[Y]$. Il en résulte que $\mathrm{ht}_{R[Y]}\, XB[Y][X] = 1$ [12, Corollaire 1.4 (b1)]. D'où, $\mathrm{ht}_{R[Y]}\, \mathfrak{p}[Y] = \mathrm{ht}_{R[Y]}\, XB[Y][X] = 1$.

Cas 2 : $X \notin \mathfrak{p}$. Posons $S := \{X^n : n \geq 0\}$. Nous avons $1 = \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p} = \mathrm{ht}_{S^{-1}R}\, S^{-1}\mathfrak{p} = \mathrm{ht}_{S^{-1}B[X]}\, S^{-1}\mathfrak{p}$ [12, Lemme 1.1 (b)]. Or $B[X]$ est un S-domaine (voir [13, Proposition 2.1] ou [2, Proposition 3.1]). La notion de S-domaine étant stable par localisation, il en résulte que, $\mathrm{ht}_{R[Y]}\, \mathfrak{p}[Y] = \mathrm{ht}_{S^{-1}R[Y]}\, S^{-1}\mathfrak{p}[Y] = \mathrm{ht}_{S^{-1}B[X][Y]}\, S^{-1}\mathfrak{p}[Y] = 1$. Ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1. ∎

Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous avons :

COROLLAIRE 1.2. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D, K un corps contenant $k :=$ Frac(D) et X une indéterminée sur K.*

(a) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$D + XK[X]$ est un S-domaine ;*

(ii) *K est une extension algébrique de k.*

(b) *$D^{(S)} = D + XD_S[X]$ est un S-domaine.* ∎

Remarquons que D.D. Anderson, D.F. Anderson et M. Zafrullah dans [2] d'une part, et M. Fontana et S. Kabbaj dans [13] d'autre part, ont déjà établi l'assertion (b) du Corollaire 1.2.

Nous énonçons tout de suite le théorème fondamental de ce paragraphe :

THEOREME 1.3. *Soit $R = A + XB[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est un* S-*domaine fort universel et l'homomorphisme* $A \to B$ *est incomparable* [16, p. 28];

(ii) A *et* B *sont des* S-*domaines forts universels et* $A \to B$ *est résiduellement algébrique* [10, p. 292].

Pour démontrer ce résultat, nous allons établir trois lemmes et un théorème.

LEMME 1.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'homomorphisme* $A \to B$ *est résiduellement algébrique ;*

(ii) *L'homomorphisme* $A[X_1, \dots, X_n] \to B[X_1, \dots, X_n]$ *est résiduellement algébrique, pour tout entier naturel* $n \geq 0$.

DEMONSTRATION. En effet, il suffit de vérifier que (i) $\Rightarrow$ (ii) pour $n = 1$. Soient $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(B[Y])$ et $\mathfrak{P} := \mathfrak{Q} \cap A[Y]$. On a les homomorphismes d'inclusion suivants:

$$\begin{array}{ccc} A[Y]/\mathfrak{P} & \to & B[Y]/\mathfrak{Q} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/(\mathfrak{P}\cap A) & \to & B/(\mathfrak{Q}\cap B) \end{array}$$

Deux cas sont possibles.

Cas 1 : $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}[Y]$, où $\mathfrak{q} := \mathfrak{Q} \cap B$. Alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}[Y]$ avec $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A$ et on a $\text{deg.tr.}_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})[Y] = \text{deg.tr.}_{B/\mathfrak{q}}(B/\mathfrak{q})[Y]$. Le diagramme ci-dessus permet alors de conclure.

Cas 2 : $\mathfrak{Q}$ est un supérieur de $\mathfrak{q}$. Alors si $A \to B$ est résiduellement algébrique, nécessairement $\mathfrak{P}$ est un supérieur de $\mathfrak{p}$ [17, Theorem 2.2]. Dans ce cas, nous savons [6, Lemma 4.4] que $B[Y]/\mathfrak{Q}$ (respectivement, $A[Y]/\mathfrak{P}$) est algébrique sur $B/\mathfrak{q}$ (respectivement, $A/\mathfrak{p}$) et le diagramme ci-dessus permet encore une fois de conclure. ∎

LEMME 1.5. *Soient* $A \to B$ *un homomorphisme incomparable,* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ *deux idéaux premiers de* $R = A + XB[X]$ *et* $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{Q}'$ *deux idéaux premiers de* $B[X]$ *tels que* $\mathfrak{P}' \cap R = \mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{Q}' \cap R = \mathfrak{Q}$. *Alors,* $\mathrm{ht}\, \mathfrak{Q}/\mathfrak{P} = 1$ *entraîne que* $\mathrm{ht}\, \mathfrak{Q}'/\mathfrak{P}' = 1$.

DEMONSTRATION. Posons $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{Q} \cap A$, $\mathfrak{p}' := \mathfrak{P}' \cap B$ et $\mathfrak{q}' := \mathfrak{Q}' \cap B$; on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap A$. Trois cas se présentent.

Cas 1 : $X \notin \mathfrak{Q}$: [12, Lemme 1.1 (b)] permet de conclure.

Cas 2 : $X \in \mathfrak{Q}$ et $X \notin \mathfrak{P}$. Supposons que $\mathrm{ht}\, \mathfrak{Q}'/\mathfrak{P}' > 1$ et soit $\mathfrak{H}' \in \mathrm{Spec}(B[X])$ tel que $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{H}' \subset \mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}', X)$. Dans R, nous obtenons la chaine $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$, où $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}' \cap R$, avec $\mathrm{ht}\, \mathfrak{Q}/\mathfrak{P} = 1$.

Cependant $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{H}$, sinon on aurait $\mathfrak{P}' = \mathfrak{H}'$ [12, Lemme 1.1 (b)]. Il en résulte que $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$. Par conséquent, $X \in \mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}' \cap B \cap A = \mathfrak{q}$. L'homomorphisme $A \to B$ est incomparable, donc $\mathfrak{H}' \cap B = \mathfrak{q}'$. D'où, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{q}' + XB[X] = \mathfrak{Q}'$. Absurde.

Cas 3 : $X \in \mathfrak{P}$. Soit $\mathfrak{H}' \in \mathrm{Spec}(B[X])$ tel que $\mathfrak{P}' = (\mathfrak{p}', X) \subset \mathfrak{H}' \subset \mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}', X)$. Dans R, nous obtenons la chaine $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + XB[X] \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$, où $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \cap R$, avec $\mathrm{ht}\,\mathfrak{Q}/\mathfrak{P} = 1$. Il en découle, aisément, que $\mathfrak{H}' = \mathfrak{P}'$ ou $\mathfrak{H}' = \mathfrak{Q}'$. D'où le lemme. ∎

LEMME 1.6 **(a)** *Si $A \to B$ est algébrique, alors pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de B on a $\mathfrak{p} \cap A \neq (0)$.*

(b) *Si $A \to B$ est résiduellement algébrique, alors $A \to B$ est incomparable.*

DEMONSTRATION. **(a)** Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B et $z \in \mathfrak{p}$. L'élément z est algébrique sur A, alors il existe $s \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_{n-1}$ des éléments de A tels que $sz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. On en déduit que, $0 \neq a_0 = -(sz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z) \in \mathfrak{p} \cap A$. Ainsi $\mathfrak{p} \cap A \neq (0)$, d'où (a).

(b) C'est une conséquence de (a). ∎

La réciproque du Lemme 1.6 (a) est en général fausse. Cela est illustré par l'Exemple 3.4 (a). Notons, de même, que l'assertion (b) du Lemme 1.6 permet de se passer de l'hypothèse d'incomparabilité dans [10, Theorem 2.2 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (viii)].

THEOREME 1.7. *Soient $A \subseteq B$ une extension d'anneaux. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$R = A + XB[X]$ est un S-domaine fort et $A \to B$ est incomparable ;*

(ii) *A et $B[X]$ sont des S-domaines forts et $A \to B$ est résiduelement algébrique.*

DEMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si R est un S-domaine fort, il en est de même de $A \simeq R/XB[X]$ et $B[X, X^{-1}] = S^{-1}R$, où $S := \{X^n \mid n \geq 0\}$, puisque la notion de S-domaine fort est stable par passage au quotient et par localisation (cf. [16] et [18]). D'autre part, $B[X, X^{-1}]$ est entier sur $B[X + X^{-1}]$, il en résulte que $B[X + X^{-1}]$ est un S-domaine fort [18, Theorem 4.6]. L'anneau $B[X]$ est isomorphe à $B[X + X^{-1}]$, c'est donc un S-domaine fort.

Soit maintenant $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. Alors, on peut aisément vérifier que l'anneau $R/(\mathfrak{q}[X] \cap R)$, qui est par hypothèse un S-domaine, est canoniquement isomorphe à $A/(\mathfrak{q} \cap A) + X(B/\mathfrak{q})[X]$. Comme $A \to B$ est incomparable, alors

$\mathrm{ht}_{R/(\mathfrak{q}[X]\cap R)}X(B/\mathfrak{q})[X] = 1$ [12, Lemme 1.3], et du Théorème 1.1 il résulte que $B/\mathfrak{q}$ est algébrique sur $A/(\mathfrak{q}\cap A)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) D'après le Lemme 1.6 (b), l'homomorphisme $A \to B$ est incomparable. Il reste donc à montrer que si $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ sont deux idéaux premiers consécutifs dans $\mathrm{Spec}(R)$, il en est de même de $\mathfrak{P}[Y] \subset \mathfrak{Q}[Y]$ dans $\mathrm{Spec}(R[Y])$. Trois cas sont possibles :

Cas 1 : $X \in \mathfrak{P}$. Alors $X \in \mathfrak{Q}$ et la conclusion résulte du fait que A est un S-domaine fort et de l'isomorphisme canonique d'ordre $\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R) : X \in \mathfrak{P}\} \to \mathrm{Spec}(A)$ (cf. par exemple [12, Lemme 1.1 (a)].

Cas 2 : $X \notin \mathfrak{Q}$. Alors $X \notin \mathfrak{P}$ et la conclusion est une conséquence du fait que $B[X]$ est un S-domaine fort et de l'isomorphisme canonique d'ordre $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : X \notin \mathfrak{p}\} \to \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B[X]) : X \notin \mathfrak{q}\}$ (cf. par exemple [12, Lemme 1.1 (b)].

Cas 3 : $X \notin \mathfrak{P}$ et $X \in \mathfrak{Q}$. Alors $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$ avec $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ [12, Lemme 1.1 (a)]. Supposons que $\mathfrak{P}[Y] \subset \mathfrak{Q}[Y]$ ne soient pas consécutifs dans $R[Y]$ et soit $\mathfrak{H} \in \mathrm{Spec}(R[Y])$ tel que $\mathfrak{P}[Y] \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{Q}[Y]$.

Si $X \in \mathfrak{H}$, on obtient dans R la chaine distincte $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{H} \cap R \subset \mathfrak{Q}$. Ce qui est en contradiction avec $\mathrm{ht}\,\mathfrak{Q}/\mathfrak{P} = 1$. Nécessairement, $X \notin \mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H} = <\mathfrak{P}, g(Y)>$ est un supérieur de $\mathfrak{P}$ dans $R[Y]$. D'autre part, $\mathfrak{Q}[Y] = \mathfrak{q}[Y] + XB[Y][X]$ est minimal à contenir $\mathfrak{H}$ et $XB[Y][X]$. D'après [7, Proposition 4], on peut relever $\mathfrak{P}[Y] \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{Q}[Y]$ en une chaine $\mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{H}'' \subset \mathfrak{Q}''$ dans $B[X, Y]$. De l'isomorphisme canonique d'ordre $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R[Y]) : X \notin \mathfrak{p}\} \to \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B[X, Y]) : X \notin \mathfrak{q}\}$ [12, Lemme 1.1 (b)], on déduit que $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}'[Y]$ avec $\mathfrak{P}' := \mathfrak{P}'' \cap B[X]$. En effet $\mathfrak{P}'[Y] \cap R[Y] = (\mathfrak{P}' \cap R)[Y] = (\mathfrak{P}'' \cap B[X] \cap R)[Y] = (\mathfrak{P}'' \cap R)[Y] = \mathfrak{P}[Y] = \mathfrak{P}'' \cap R[Y]$.

Posons maintenant $\mathfrak{Q}' := \mathfrak{Q}'' \cap B[X]$, on a de même $\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}', X)$ avec $\mathfrak{q}' := \mathfrak{Q}' \cap B$, et $\mathfrak{Q}' \cap R = \mathfrak{Q}'' \cap B[X] \cap R = \mathfrak{Q}'' \cap R[Y] \cap R = \mathfrak{Q}[Y] \cap R = \mathfrak{Q}$. Le Lemme 1.5 permet d'affirmer que $\mathrm{ht}\,\mathfrak{Q}'/\mathfrak{P}' = 1$.

Revenons maintenant à la chaine $\mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{H}'' \subset \mathfrak{Q}''$ dans $B[X, Y]$. D'après [17, Theorem 2], deux cas sont possibles pour $\mathfrak{Q}''$.

Cas 1 : $\mathfrak{Q}'' = <\mathfrak{Q}', f(Y)>$, avec $f \in (B[X]/\mathfrak{Q}')[Y] \simeq (B/\mathfrak{q}')[Y]$, f est irréductible dans $\mathrm{Frac}((B[X]/\mathfrak{Q}')[Y])$ et ne divise aucun polynôme de $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{Q})[Y] \simeq \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{q})[Y]$. Il est impossible, car le fait que l'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to B/\mathfrak{q}'$ soit algébrique entraine qu'un tel f ne peut pas exister.

Cas 2 : $\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}'[Y]$. Dans $B[X, Y]$, nous avons la chaine distincte $\mathfrak{P}'[Y] \subset \mathfrak{H}'' \subset \mathfrak{Q}'[Y]$. Absurde, car $\mathrm{ht}\,\mathfrak{Q}'/\mathfrak{P}' = 1$ et $B[X]$ est par hypothèse un S-domaine fort. Par conséquent, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{Q}[Y]/\mathfrak{P}[Y] = 1$. Ce qui achève la démonstration. ∎

Notons cependant que le Théorème 1.7 généralise [13, Proposition 2.3].

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.3.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $n \geq 0$. Supposons que $R[X_1, ..., X_n] = A[X_1, ..., X_n] + XB[X_1, ..., X_n][X]$ soit un S-domaine fort, donc par passage au quotient R est un S-domaine fort. Du Théorème 1.7, il résulte que $A \rightarrow B$ est résiduellement algébrique, et du Lemme 1.4 que l'homomorphisme $A[X_1, ..., X_n] \rightarrow B[X_1, ..., X_n]$ est résiduellement algébrique. D'après le Lemme 1.6 (b), $A[X_1, ..., X_n] \rightarrow B[X_1, ..., X_n]$ est incomparable. Alors du Théorème 1.7 il découle que $A[X_1, ..., X_n]$ et $B[X_1, ..., X_n][X]$ sont des S-domaines forts. Par conséquent, A et B sont des S-domaines forts universels.

(ii) $\Rightarrow$ (i) découle aisément du Lemme 1.4 et du Théorème 1.7. ∎

Comme application directe des Théorèmes 1.3 et 1.7, nous retrouvons comme corollaires les résultats déjà établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D + XD_S[X]$ (cf. [13], [15] et [18]) :

COROLLAIRE 1.8. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D et K un corps contenant* Frac(D). *Alors :*

(a) *$D + XK[X]$ est un S-domaine fort si et seulement si D est un S-domaine fort et K est une extension algébrique de* Frac(D).

(b) *$D + XD_S[X]$ est un S-domaine fort si et seulement si D et D_S sont des S-domaines forts.*

DEMONSTRATION. Il suffit simplement de remarquer que l'homomorphisme canonique $D \rightarrow D_S$ est incomparable. ∎

COROLLAIRE 1.9. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D et K un corps contenant* Frac(D). *Alors :*

(a) *$D + XK[X]$ est un S-domaine fort universel si et seulement si D est un S-domaine fort universel et K est une extension algébrique de* Frac(D).

(b) *$D + XD_S[X]$ est un S-domaine fort universel si et seulement si D est un S-domaine fort universel.* ∎

PROPOSITION 1.10. *Soient $A \subseteq B$ une extension d'anneaux. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$R = A + XB[X]$ est noethérien ;*

(ii) *A et B sont noethériens et $A \rightarrow B$ est fini.*

DEMONSTRATION. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Il suffit de remarquer que si R est noethérien alors $A \simeq R/XB[X]$ et $B[X, X^{-1}] = S^{-1}R$, où $S := \{X^n \mid n \geq 0\}$, sont noethériens et donc B est noethérien. La conclusion s'ensuit de [21, Théorème 2.1].

(ii) $\Longrightarrow$ (i) découle de [11, Proposition 1.8]. ∎

Notons, cependant, que dans (ii) de la Proposition 1.10 il suffit de supposer l'un des anneaux A ou B noethérien, à cause de la finitude de $A \longrightarrow B$ [19, p. 16].

COROLLAIRE 1.11. *Soient* D *un anneau,* S *une partie multiplicative de* D *et* K *un corps contenant* $\mathrm{Frac}(D)$. *Alors :*

(a) $D + XK[X]$ *est un anneau noethérien si et seulement si* $D = \mathrm{Frac}(D)$ *et* K *est une extension finie de* $\mathrm{Frac}(D)$.

(b) $D + XD_S[X]$ *est un anneau noethérien si et seulement si* D *est noethérien et* $D = D_S$. ∎

§2. TRANSFERT DE LA LA CATENARITE.

Un anneau A est dit *caténaire* s'il est localement de dimension finie et si pour tout couple $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ d'idéaux premiers de A, $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = 1$ entraine que $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} = 1 + \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}$. Cette notion n'est pas, en général, stable par passage à l'anneau de polynômes à coefficient dans A. Ainsi, on dit que A est *universellement caténaire*, si l'anneau $A[X_1, \ldots, X_n]$ est caténaire pour tout entier naturel $n \geq 0$. Parmi les exemples d'anneaux universellement caténaires citons, dans le cas noethérien, les anneaux de Cohen-Macaulay et les domaines de dimension 1 (cf. par exemple [19, Theorem 31] et [22, (2.6)]) et, dans le cas non nécessairement noethérien, les anneaux de Prüfer localement de dimension finie et certains produits fibrés particuliers (cf. [4], [5], [6], [7], [8] et [13]).

Ce paragraphe est consacré à l'examen du transfert de la caténarité universelle, de A et $B[X]$, à l'anneau $R = A + XB[X]$. A l'instar de l'étude précédente, nous retrouvons et généralisons les résultats déjà établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D^{(S)} := D + XD_S[X]$.

Nous commençons par rappeler que $R = A + XB[X]$ est très rarement noethérien. En effet de [21, Theorem 2.1] et [11, Proposition 1.8] on déduit que, si A et B sont noethériens, alors R est noethérien si et seulement si $A \longrightarrow B$ est fini.

Nous énonçons tout de suite le théorème fondamental de ce paragraphe :

THEOREME 2.1. *Soit* $R = A + XB[X]$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est universellement caténaire et l'homomorphisme* $A \to B$ *est incomparable ;*

(ii) A *et* B *sont universellement caténaires, l'homomorphisme* $A \to B$ *est résiduellement algébrique et* $\mathrm{ht}_B \mathfrak{P} = \mathrm{ht}_A (\mathfrak{P} \cap A)$ *pour tout* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$.

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. *Soient* $A \to B$ *un homomorphisme incomparable d'anneaux et* $R = A + XB[X]$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est caténaire ;*

(ii) A *et* $B[X]$ *sont caténaires et* $\mathrm{ht}_B \mathfrak{P} = \mathrm{ht}_A (\mathfrak{P} \cap A)$ *pour tout* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$.

DEMONSTRATION. On peut aisément vérifier que R est localement de dimension finie si et seulement si A et B le sont (cf. [11, Theorem 1.4] et [12, Lemme 1.1]).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) La caténarité est stable par passage au quotient et par localisation. Donc, $A \simeq R/XB[X]$ et $B[X, X^{-1}] = S^{-1}R$, où $S := \{X^n : n \geq 0\}$, sont caténaires. Cependant, il a été établi dans [1, Proposition 1.8] qu'étant donnés un anneau A et un groupe G sans torsion de rang n , alors $A[G]$ est caténaire si et seulement si $A[X_1, \ldots, X_n]$ est caténaire. Or $B[X, X^{-1}] = B[\mathbb{Z}]$ est caténaire, il en résulte de même pour $B[X]$.

Soient $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \setminus \{(0)\}$ et $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$. L'homomorphisme $A \to B$ est incomparable, donc $\mathfrak{p} \neq (0)$. Il en résulte que $\mathrm{ht}_R XB[X] = 1$ et les idéaux $XB[X]$ et $\mathfrak{P}[X] \cap R$ sont incomparables [12, Lemme 1.3]. D'autre part, on peut aisément vérifier que $R/(\mathfrak{P}[X] \cap R)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{p} + X(B/\mathfrak{P})[X]$ et que $(\mathfrak{p} + XB[X])/(\mathfrak{P}[X] \cap R)$ est isomorphe à $X(B/\mathfrak{P})[X]$. Soit $R' := A/\mathfrak{p} + X(B/\mathfrak{P})[X]$, de [12, Lemme 1.3] découle que $\mathrm{ht}_{R'} X(B/\mathfrak{P})[X] = 1$ (car $A \to B$ étant incomparable, il en est de même pour $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{P}$). Donc, $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{p} + XB[X])/(\mathfrak{P}[X] \cap R) = 1$. Dans R nous avons alors les deux chaines saturées d'idéaux premiers :

$$(0) \subset XB[X] \subset \ldots \subset \mathfrak{p} + XB[X] \quad \text{et} \quad (0) \subset \ldots \subset \mathfrak{P}[X] \cap R \subset \mathfrak{p} + XB[X] .$$

Or R est caténaire alors les deux chaines sont de même longueur. Il en résulte que $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} + 1 = \mathrm{ht}_R (\mathfrak{p} + XB[X]) = \mathrm{ht}_R (\mathfrak{P}[X] \cap R) + 1 = \mathrm{ht}_{B[X]} \mathfrak{P}[X] + 1$. D'où, $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = \mathrm{ht}_{B[X]} \mathfrak{P}[X]$. Cependant, $B[X]$ étant caténaire, l'anneau B est un S-domaine fort [6, Lemma 2.3]. Il en résulte que, $ht_B \mathfrak{P} = ht_{B[X]} \mathfrak{P}[X]$ et, par conséquent, $ht_A \mathfrak{p} = ht_B \mathfrak{P}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soient $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ deux idéaux premiers consécutifs de R . Trois cas sont possibles :

Cas 1: $X \in \mathfrak{P}$. Alors $X \in \mathfrak{Q}$. L'anneau A étant caténaire, la conclusion découle de [12, Lemme 1.1 (a)].

Cas 2 : $X \notin \mathfrak{Q}$. Alors $X \notin \mathfrak{P}$. L'anneau $B[X]$ étant caténaire, la conclusion résulte de [12, Lemme 1.1 (b)].

Cas 3 : $X \notin \mathfrak{P}$ et $X \in \mathfrak{Q}$. Posons $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$ avec $\mathfrak{q} := \mathfrak{Q} \cap A$. L'idéal $\mathfrak{Q}$ étant minimal à contenir $\mathfrak{P}$ et $XB[X]$, la chaine $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ se relève en $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{Q}'$ dans $B[X]$ [7, Proposition 4]. Nécessairement, $X \notin \mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}', X)$, où $\mathfrak{q}' := \mathfrak{Q}' \cap B$ avec $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{q}$. D'après Lemme 1.5, les idéaux $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{Q}'$ sont consécutifs. Comme $B[X]$ est par hypothèse caténaire, alors $ht_{B[X]} \mathfrak{Q}' = 1 + ht_{B[X]} \mathfrak{P}'$. Soit alors $(0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset ... \subset \mathfrak{P}_r \subset \mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{p}_{r+1} + XB[X] \subset ... \subset \mathfrak{P}_n = \mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + XB[X]$ une chaine réalisant $ht_R \mathfrak{Q}$, avec $X \notin \mathfrak{P}_r$, $0 \leq r \leq n - 1$, et $\mathfrak{p}_{r+1} \in \mathrm{Spec}(A)$. L'idéal $\mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{p}_{r+1} + XB[X]$ est minimal à contenir $\mathfrak{P}_r$ et $XB[X]$, alors d'après [7, Proposition 4], on peut relever $(0) \subset \mathfrak{P}_1 \subset ... \subset \mathfrak{P}_{r+1}$ en une chaine $(0) \subset \mathfrak{P}'_1 \subset ... \subset \mathfrak{P}'_{r+1}$ d'idéaux premiers de $B[X]$ de même longueur avec $\mathfrak{P}'_{r+1} = (\mathfrak{p}'_{r+1}, X)$ et $X \notin \mathfrak{P}'_r$. Comme $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap A$ et $\mathfrak{p}_{r+1} = \mathfrak{p}'_{r+1} \cap A$, alors par hypothèse $ht_A \mathfrak{q} = ht_B \mathfrak{q}'$ et $ht_A \mathfrak{p}_{r+1} = ht_B \mathfrak{p}'_{r+1}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
ht_R \mathfrak{Q} &= ht_{B[X]} (\mathfrak{p}'_{r+1}, X) + ht\, \mathfrak{P}_n/\mathfrak{P}_{r+1} \\
&= ht_{B[X]} (\mathfrak{p}'_{r+1}, X) + ht\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p}_{r+1} \\
&= ht_{B[X]} \mathfrak{p}'_{r+1}[X] + 1 + ht\, \mathfrak{q}/\mathfrak{p}_{r+1} \\
&= ht_{B[X]} \mathfrak{p}'_{r+1}[X] + 1 + ht_A \mathfrak{q} - ht_A \mathfrak{p}_{r+1} \quad \text{(car } A \text{ est caténaire)} \\
&= ht_B \mathfrak{p}'_{r+1} + 1 + ht_A \mathfrak{q} - ht_A \mathfrak{p}_{r+1} \quad \text{(car } B \text{ est un S-domaine fort)} \\
&= ht_A \mathfrak{p}_{r+1} + 1 + ht_A \mathfrak{q} - ht_A \mathfrak{p}_{r+1} \\
&= ht_B \mathfrak{q}' + 1 \\
&= ht_{B[X]} \mathfrak{q}'[X] + 1 \quad (B \text{ est un S-domaine fort}) \\
&= ht_{B[X]} \mathfrak{Q}' .
\end{aligned}$$

D'où $ht_R \mathfrak{Q} = ht_{B[X]} \mathfrak{Q}' = ht_{B[X]} \mathfrak{P}' + 1 = ht_R \mathfrak{P} + 1$ (car $X \notin \mathfrak{P}'$ [12, Lemme 1.1 (b)]). Par conséquent, R est caténaire. ∎

Notons que la Proposition 2.2 généralise [13, Proposition 2.3] :

COROLLAIRE 2.3. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D et K un corps contenant D . Alors,*

(a) $D + XK[X]$ *est caténaire si et seulement si* D *est caténaire.*

(b) $D + XD_S[X]$ *est caténaire si et seulement si* D *et* $D_S[X]$ *sont caténaires.*

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que les homomorphismes $D \to K$ et $D \to D_S$ sont incomparables et que $\mathrm{ht}_D(\mathfrak{P} \cap D) = \mathrm{ht}_{D_S}\mathfrak{P}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de D_S. ∎

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) L'anneau R est universellement caténaire, donc c'est un S-domaine fort universel [6, Theorem 2.4]. Or $A \to B$ étant incomparable, il découle du Théorème 1.3 que $A \to B$ est résiduellement algébrique. D'après Lemme 1.4, $A[X_1, ..., X_n] \to B[X_1, ..., X_n]$ est résiduellement algébrique pour tout $n \geq 0$, donc incomparable (Lemme 1.6 (b)). De la Proposition 2.2 il résulte alors que $A[X_1, ..., X_n]$ et $B[X_1, ..., X_n]$ sont caténaires pour tout $n \geq 0$, et que $\mathrm{ht}_B\mathfrak{P} = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{P} \cap A)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de B.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $n \geq 0$. Supposons que $A[X_1, ..., X_n]$ et $B[X_1, ..., X_n]$ soient caténaires, que $\mathrm{ht}_B\mathfrak{P} = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{P} \cap A)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de B et que $A \to B$ soit résiduellement algébrique. D'après le Lemme 1.4, $A[X_1, ..., X_n] \to B[X_1, ...,X_n]$ est résiduellement algébrique et, d'après le Lemme 1.6 (b), $A \to B$ est incomparable. Nous affirmons en plus que $\mathrm{ht}_{B[X_1, ..., X_n]}\mathfrak{P} = \mathrm{ht}_{A[X_1, ..., X_n]}(\mathfrak{P} \cap A[X_1, ..., X_n])$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $B[X_1, ..., X_n]$. En effet, il suffit de le montrer pour une seule indéterminée. Soit alors $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B[Y])$, deux cas sont possibles :

Cas 1 : $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}[Y]$, où $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap B$. Alors $\mathfrak{P} \cap A[Y] = (\mathfrak{p} \cap A)[Y]$. Comme par hypothèse $\mathrm{ht}_B\,\mathfrak{p} = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{p} \cap A)$ et comme A et B sont des S-domaines forts [6, Theorem 2.4], on en déduit que $\mathrm{ht}_{B[Y]}\mathfrak{P} = \mathrm{ht}_{A[Y]}(\mathfrak{P} \cap A[Y])$.

Cas 2 : $\mathfrak{P}$ est un supérieur de $\mathfrak{p}$. Et comme en plus $A \to B$ est résiduellement algébrique, on a les homomorphismes algébriques d'inclusion suivants :

$$\begin{array}{ccc} A[Y]/(\mathfrak{P} \cap A[Y]) & \longrightarrow & B[Y]/\mathfrak{P} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/(\mathfrak{p} \cap A) & \longrightarrow & B/\mathfrak{p} \end{array}$$

Nécessairement $\mathfrak{P} \cap A[Y]$ est un supérieur de $\mathfrak{p} \cap A$. Ainsi, $\mathrm{ht}_{B[Y]}\mathfrak{P} = \mathrm{ht}_{B[Y]}\,\mathfrak{p}[Y] + 1 = \mathrm{ht}_{A[Y]}(\mathfrak{p} \cap A)[Y] + 1 = \mathrm{ht}_{A[Y]}(\mathfrak{P} \cap A[Y])$. De la Proposition 2.2, il en résulte que $R[X_1, ..., X_n]$ est caténaire. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Soient* D *un anneau,* S *une partie multiplicative de* D *et* K *un corps contenant* D. *Alors,*

(a) $D + XK[X]$ *est universellement caténaire si et seulement si* D *est universellement caténaire et* K *est une extension algébrique de* Frac(D).

(b) *$D + XD_S[X]$ est universellement caténaire si et seulement si D est universellement caténaire.* ∎

Dans [12, Exemple 3.1 (d)] nous avons illustré le fait que $R = A + XB[X]$ peut être localement de Jaffard sans que A le soit. (Un *anneau* A est dit *de Jaffard* si sa dimension de Krull est finie et si elle coïncide avec sa dimension valuative, il est *localement de Jaffard* si $A_{\mathfrak{p}}$ est de Jaffard pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A [3] et il est *totalement de Jaffard* si $A/\mathfrak{p}$ est localement de Jaffard pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A [8].) Cependant, si R est caténaire nous avons :

THEOREME 2.5. *Soient $A \subseteq B$ une extension d'anneaux, X une indéterminée sur B et $R = A + XB[X]$. Supposons que R soit caténaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est localement de Jaffard ;*

(ii) *R est totalement de Jaffard ;*

(iii) *A et $B[X]$ sont localement de Jaffard et* $\mathrm{ht}_R\, XB[X] = \mathrm{deg.tr.}_A\, B + 1$.

DEMONSTRATION. (i) et (ii) sont équivalentes d'après [8, Corollaire 1.(ii)].

(i) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit de montrer que A est localement de Jaffard. Le reste découle de [12, Théorème 2.8]. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. L'anneau $R_{\mathfrak{p}+XB[X]}$ étant un anneau de Jaffard, d'après [12, Théorème 2.3 (a) et Théorème 2. 8], on a $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p}+XB[X] = \dim R_{\mathfrak{p}+XB[X]} = \dim_v R_{\mathfrak{p}+XB[X]} = \dim_v A_{\mathfrak{p}} + \mathrm{deg.tr.}_A\, B + 1 = \dim_v A_{\mathfrak{p}} + \mathrm{ht}_R\, XB[X]$. L'anneau R est caténaire, alors $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{p}+XB[X] = \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} + \mathrm{ht}_R\, XB[X] = \dim A_{\mathfrak{p}} + \mathrm{ht}_R\, XB[X]$. Il en découle que $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim_v A_{\mathfrak{p}}$ et par conséquent $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de Jaffard. Cela étant pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il en résulte que A est localement de Jaffard.

(iii) $\Rightarrow$ (i) découle de [12, Théorème 2.8], sans l'hypothèse de caténarité sur R.

∎

COROLLAIRE 2.6. *Soient D un anneau, S une partie multiplicative de D et K un corps contenant D.*

(a) *Si D est caténaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$D + XK[X]$ est localement de Jaffard ;*

(ii) *$D + XK[X]$ est totalement de Jaffard ;*

(iii) *D est localement de Jaffard et K est une extension algébrique de* $\mathrm{Frac}(D)$.

(b) *Si en plus $D_S[X]$ est caténaire (ou, plus particulièrement, si $D[X]$ est caténaire), les assertions suivantes sont équivalentes :*

(j) *$D^{(S)} = D + XD_S[X]$ est localement de Jaffard ;*

(jj) *$D^{(S)}$ est totalement de Jaffard ;*

(jjj) *D est localement de Jaffard.*

DEMONSTRATION. (a) Il suffit de remarquer que si D est caténaire, il en est de même pour $D + XK[X]$ (Corollaire 2.3 (a)); le Théorème 2.5 permet de conclure.

(b) Si D et $D_S[X]$ sont caténaires, d'après Corollaire 2.3 (b), $D^{(S)}$ est aussi caténaire. Le Théorème 2.5 permet de conclure. Si $D[X]$ est caténaire, il en est de même pour D et $D_S[X]$. ∎

§ 3. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Comme application intéressante, nous sommes en mesure d'enrichir les classes d'anneaux, relatives aux notions précédemment étudiées, par de nouveaux exemples — tels que $\mathbb{Z} + X\mathcal{O}_K[X]$ (Exemple 3.5) ou $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X, Y]$ (Exemple 3.6) — qui étaient, jusque là, en dehors du champ des constructions étudiées. Nous fournirons ainsi des exemples d'illustration pour les résultats établis aux Paragraphes 1 et 2.

Nous donnerons, de même, des contre-exemples montrant que, sous leurs formes classiques, certains des résultats établis sur les anneaux $D + XK[X]$ et $D + XD_S[X]$ ne s'étendent pas, tels quels, au cas plus général des constructions de la forme $R = A + XB[X]$. Les exemples fournis sont aussi des constructions B, I, D qui ne sont cependant ni simples ni presque simples (cf. [7] et [8]), ni issues d'algèbres de type fini [4].

Tout d'abord, nous énonçons un lemme utile par la suite :

LEMME 3.1. *Soient $A \subseteq B$ une extension d'anneaux et $R = A + XB[X]$. Si R est un S-domaine fort, alors $A/(\mathfrak{q} \cap A) \rightarrow B/\mathfrak{q}$ est algébrique, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B maximal au-dessus de $\mathfrak{q} \cap A$.*

DEMONSTRATION. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B maximal au-dessus de $\mathfrak{q} \cap A$ et $R' := A/(\mathfrak{q} \cap A) + X(B/\mathfrak{q})[X]$. D'après [12, Lemme 1.3],

$\mathrm{ht}_{R'} X(B/\mathfrak{q})[X] = 1$ (car $\mathfrak{q}$ maximal au-dessus de $\mathfrak{q} \cap A$). Or, R étant un S-domaine fort et $R' \simeq R/(\mathfrak{q}[X] \cap R)$, l'anneau R' est un S-domaine. Donc d'après le Théorème 1.1, l'homomorphisme $A/(\mathfrak{q} \cap A) \longrightarrow B/\mathfrak{q}$ est algébrique. D'où le lemme. ∎

EXEMPLE 3.2. Soient K un corps, X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y et Z des indéterminées sur K . Posons :

$$A := K[X_1]_{(X_1)} + X_2K(X_1)[X_2]_{(X_2)} ,$$

$$B := K(X_1, X_2, X_3) + YK(X_1, X_2, X_3)[Y]_{(Y)} = L + \mathfrak{M} ,$$

où $L := K(X_1, X_2, X_3)$ et $\mathfrak{M} := YK(X_1, X_2, X_3)[Y]_{(Y)}$.

L'anneau $R = A + XB[X]$ fournit :

(a) un exemple de S-domaine qui n'est pas un S-domaine fort (donc, il n'est pas noethérien);

(b) un contre-exemple montrant que [13, Proposition 2.3], [13, Corollary 2.4] et [13, Theorem 2.5] ne peuvent pas s'étendre au cas général des constructions $A + XB[X]$.

En effet, des résultats établis sur les anneaux de type $D + \mathfrak{M}$ [11, Theorem 2.4 (1)] découle que A et B sont des anneaux de valuation donc universellement caténaires (et *a fortiori* des S-domaines forts universels) [6, Theorem 2.4]. De plus l'anneau B est noethérien. Nous avons :

$\mathrm{Spec}(B) = \{(0) ; \mathfrak{M} \}$,

$\mathrm{Spec}(A) = \{(0) ; \mathfrak{N} = X_2K(X_1)[X_2]_{(X_2)} ; \mathfrak{Q} = \mathfrak{N} + X_1K[X_1]_{(X_1)} \}$,

$\mathfrak{M} \cap A = (0)$, $\mathrm{deg.tr.}_A B = 2$ et $\mathrm{ht}_R XB[X] = 2 > 1$, [12, Lemme 1.3] ,

$\mathrm{deg.tr.}_A B/\mathfrak{M} = 1$ et $\mathrm{ht}_{R/(\mathfrak{M}[X] \cap R)} X(B/\mathfrak{M})[X] = 1$, [12, Lemme 1.3].

(a) Notons que $\mathrm{ht}_R XB[X] = 2 > 1$ (et que l'anneau B est transcendant sur A) d'après le Théorème 1.1, il résulte que R est un S-domaine. On a $\mathrm{deg.tr.}_A B/\mathfrak{M} = 1$, avec $\mathfrak{M}$ maximal au dessus de $(0) \in \mathrm{Spec}(A)$, alors d'après le Lemme 3.1, l'anneau R n'est pas un S-domaine fort.

(b) $A[Z]$ et $B[Z][X]$ sont des S-domaines forts et caténaires. Cependant, l'anneau $R[Z] = A[Z] + XB[Z][X]$ n'est ni caténaire ni un S-domaine fort car n'est pas un S-domaine fort [6, Lemma 2.3]. Contrairement à ce qu'affirme [13, Proposition 2.3] pour les constructions de type $D + XD_S[X]$.

Nous avons déjà noté que $R[Z] = A[Z] + XB[Z][X]$ n'est ni caténaire ni un S-domaine fort, alors que $A[Z][X]$ est S-domaine fort caténaire. Ainsi, sous sa forme classique, [13, Corollary 2.4] ne peut pas s'étendre au cas général des constructions $R = A + XB[X]$.

L'anneau A est universellement caténaire (donc un S-domaine fort universel [6, Theorem 2.4]), alors que R n'est pas un S-domaine fort universel (donc non universellement caténaire). Contrairement à ce qu'affirme [13, Theorem 2.5] pour les constructions de type $D + XD_S[X]$. ∎

EXEMPLE 3.3. Soient K un corps, X_1, X_2 et X des indéterminées sur K. Posons $A := K$, $S := K[X_1, X_2] \setminus \{ (X_1) \cup (X_1 + 1, X_2) \}$, $B := S^{-1}K[X_1, X_2]$ et $R := A + XB[X]$. Alors,

(a) R est un anneau localement de Jaffard de dimension 3.

(b) R n'est pas caténaire.

(c) R n'est pas un S-domaine fort (donc, il n'est pas noethérien).

(d) R n'est pas totalement de Jaffard.

En effet, on a :

$\mathrm{Spec}(A) = \{(0)\}$

$\mathrm{Spec}(B)$ *contient* $\{(0)\,;\, \mathfrak{P}_1 = S^{-1}X_1K[X_1, X_2]\,;\, \mathfrak{P}_2 = S^{-1}X_2K[X_1, X_2]\,;$
$\mathfrak{P}_3 = S^{-1}(X_1 + 1, X_2)K[X_1, X_2]\}$.

(a) Il est clair que $\mathrm{Frac}(A) = A \subset B$ et $\mathrm{deg.tr.}_A B = 2$. On a donc, $\dim R = \dim A + \dim B[X] = 3 = \dim B[X]$ [12, Théorème 2.1 (b)] et $\dim_v R = \dim_v A + \mathrm{deg.tr.}_A B + 1 = 3$, [12, Théorème 2.3 (a)]. Donc R est un anneau de Jaffard (cf. aussi [12, Corollaire 2.7]). De plus, de [12, Corollaire 1.4 (a)] découle $\mathrm{ht}_R XB[X] = \dim B[X] = 3 = 1 + \mathrm{deg.tr.}_A B$. Il est clair que A et $B[X]$ sont localement de Jaffard (car noethériens). Il en découle que R est localement de Jaffard [12, Théorème 2.8].

(b) L'anneau R n'est pas caténaire. En effet, les deux chaines $(0) \subset \mathfrak{P}_1[X] \cap R \subset XB[X]$ et $(0) \subset \mathfrak{P}_2[X] \cap R \subset \mathfrak{P}_3[X] \cap R \subset XB[X]$ sont saturées et de longueurs différentes dans R.

(c) L'anneau $B/\mathfrak{P}_1$ est transcendant sur $A/(0)$ et $\mathfrak{P}_1$ est maximal au dessus de $(0) \in \mathrm{Spec}(A)$. D'après le Lemme 3.1, R n'est pas un S-domaine fort.

(d) R n'est pas totalement de Jaffard car ce n'est pas un S-domaine fort [8]. ∎

EXEMPLE 3.4. Soient K un corps, X_1, X_2 et X des indéterminées sur K. Posons $A := K[X_1]_{(X_1)}$, $B := K(X_2) + X_1K(X_2)[X_1]_{(X_1)}$ et $R := A + XB[X]$.

(a) $A \to B$ fournit un contre-exemple pour la réciproque du Lemme 1.6 (a).

(b) R n'est pas un S-domaine, donc R fournit un contre-exemple montrant que [13, Corollary 2.2] ne peut pas s'etendre au cas général des constructions $A + XB[X]$.

(c) R est caténaire, mais non universellement caténaire.

En effet, A et B sont des anneaux de valuation de dimension 1 donc universellement caténaires (et, *a fortiori*, des S-domaines forts universels) [6, Theorem 2.4].

(a) L'homomorphisme $A \rightarrow B$ est transcendant et, pour tout $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \setminus \{(0)\}$, $\mathfrak{P} \cap A \neq (0)$, car B domine A. Donc la réciproque du Lemme 1.6 (a) est, en général, fausse.

(b) L'anneau R n'est pas un S-domaine, car B est transcendant sur A et $\mathrm{ht}_R\, XB[X] = 1$ (Théorème 1.1).

Dans [2, Corollary 3.3] il est établi que $D + XD_S[X]$ est un S-domaine, pour tout anneau D et toute partie multiplicative S de D. L'anneau R fournit donc un contre-exemple montrant que ce résultat ne peut pas s'étendre au cas général des constructions $A + XB[X]$.

(c) Il est clair que, pour tout $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$, $\mathrm{ht}_A\, (\mathfrak{P} \cap A) = \mathrm{ht}_B\, \mathfrak{P}$. De la Proposition 2.2 il résulte que R est caténaire. D'autre part, R n'est pas universellement caténaire, car $A \rightarrow B$ est incomparable, mais non résiduellement algébrique (Théorème 2.1). ∎

Dans ce qui suit, nous fournissons deux exemples qui, jusque là, sortaient du champ des produits fibrés antérieurement étudiés :

EXEMPLE 3.5. Soit A un anneau de Prüfer localement de dimension finie et soit B la fermeture intégrale de A dans une extension algébrique du corps des fractions de A. L'anneau $R = A + XB[X]$ est un anneau universellement caténaire (cf. Théorème 2.1, [6, Corollary 3.4] et [16, Theorem 44 and Theorem 101]), donc il est un S-domaine fort universel [6, Theorem 2.4], avec $\dim R = \dim A + 1$ (cf. [12, Théorème 2.3 (b)] et [6, Corollary 3.3]). De plus, dans ce cas, R est noethérien si et seulement si A et B sont de Dedekind et $A \rightarrow B$ est fini (Proposition 1.10).

Explicitément, $\mathbb{Z} + X\mathbb{Z}[i,\sqrt{2}][X]$ est un anneau noethérien universellemet caténaire de dimension 2, ainsi que $\mathbb{Z} + X\mathbb{Z}[\omega_d][X]$, où $\mathbb{Z}[\omega_d]$ est la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans une extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques dans le corps $K := \mathbb{Q}(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_p, \ldots)$, où ζ_p est une p-racine primitive de l'unité et p varie dans l'ensemble des entiers premiers. L'anneau $\mathbb{Z} + X\mathcal{O}_K[X]$ est un anneau universellement catenaire de dimension 2 non noethérien, car $\mathcal{O}_K$ est un anneau presque-Dedekind qu'il n'est pas de Dedekind [20]. ∎

EXEMPLE 3.6. L' anneaux $R := \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[Y][X]$ est un nouvel exemple d'anneau caténaire totalement de Jaffard de dimension 3 non noethérien.

Pour le voir, en appliquant le Théorème 2.5, il suffit de montrer que R est un anneau caténaire localement de Jaffard. Tout d'abord, il est clair que $A := \mathbb{Z}$, $B := \mathbb{Q}[Y]$ et $B[X]$ sont caténaires et que $A \rightarrow B$ n'est pas incomparable. Soient alors $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ deux idéaux premiers consécutifs de R . Trois cas sont possibles :

Cas 1 : $X \in \mathfrak{P}$, alors $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{Q} = 1 + \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{P}$ (voir la démonstration de la Proposition 2.2 (ii) $\Longrightarrow$ (i) , Cas 1).

Cas 2 : $X \notin \mathfrak{Q}$, alors $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{Q} = 1 + \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{P}$ (voir la démonstration de la Proposition 2.2 (ii) $\Longrightarrow$ (i) , Cas 2).

Cas 3 : $X \notin \mathfrak{P}$ et $X \in \mathfrak{Q}$. Montrons d'abord que $\mathfrak{Q} = X\mathbb{Q}[Y][X]$. Sinon, on aura $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q} + X\mathbb{Q}[Y][X]$ avec $\mathfrak{q}$ idéal premier non nul de $\mathbb{Z}$. L'idéal premier $\mathfrak{Q}$ étant minimal à contenir $\mathfrak{P}$ et $X\mathbb{Q}[Y][X]$, alors [7, Proposition 4] permet de relever la chaine $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ en une chaine d'idéaux premiers $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{Q}'$ dans $\mathbb{Q}[Y][X]$, avec $X \notin \mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}', X)$, où $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[Y])$ et $\mathfrak{q}' \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{q}$. Ce qui n'est pas possible, car $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[Y])$ se contracte dans $\mathbb{Z}$ sur (0) . Le cas $\mathfrak{P} = (0)$ n'est pas possible car $\mathrm{ht}_R\, XB[X] = 2$ [12, Théorème 1.2 (a)]. Donc $\mathfrak{P}$ est non nul avec $1 \leq \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{P} < \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{Q} = 2$, il en résulte que $\mathrm{ht}_R\, \mathfrak{Q} = 1 + \mathrm{ht}_R\, \mathfrak{P}$. Donc R est caténaire. D'autre part, il est clair que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}[Y][X]$ sont localement de Jaffard (car noethériens) et on a $\mathrm{ht}_R\, X\mathbb{Q}[Y][X] = 2 = 1 + \mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{Q}[Y]$. De [12, Théorème 2.8], il découle que R est localement de Jaffard et de [12, Théorème 2.1 (b)] $\dim R = \dim A + \dim B[X] = 3$. Finalement, R n'est pas noethérien car $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}[Y]$ n'est pas fini. ∎

REMERCIEMENTS

Marco Fontana a effectué le present travail avec le support partiel d'une *NATO Collaborative Research Grant* N. 900113.

Salah Kabbaj a effectué ce travail sous les auspices du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (*CNR*) et remercie le Département de Mathématiques de l'Université de Rome *"La Sapienza"* pour son hospitalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AMEZIANE. Propriétés de transfert dans les anneaux de groupe et de semi-groupe sur un anneau comutatif. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Fès, 1992.

[2] D.D. ANDERSON - D.F. ANDERSON - M. ZAFRULLAH. Rings between $D[X]$ and $K[X]$. Houston J. Math. **17** (1991), 109-129.

[3] D.F. ANDERSON - A. BOUVIER - D. DOBBS - M. FONTANA - S. KABBAJ. On Jaffard domains. Expositiones Mathematicae **6** (1988), 145-175.

[4] A. AYACHE. Sous-anneaux de la forme $D+I$ d'une K-algèbre intègre. (Prépublication du laboratoire de mathématiques de Marseille, 225, N° 87-37.) Portugaliae Math. (à paraître).

[5] A. AYACHE. Inégalité ou formule de la dimension et produits fibrés. Thèse de doctorat en sciences, Université d'Aix-Marseille, 1991.

[6] A. BOUVIER - D.E. DOBBS - M. FONTANA. Universally catenarian integral domains. Adv. Math **72** (1988), 211-238.

[7] P.-J. CAHEN. Couple d'anneaux partageant un idéal. Arch. Math. **51** (1988), 505-514.

[8] P.-J. CAHEN. Constructions B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. Arch. Math. **54** (1990), 125-141

[9] D. COSTA - J.L. MOTT - M. ZAFRULLAH. The construction $D+XD_S[X]$. J. Algebra **53** (1978), 423-439.

[10] D.E. DOBBS - M. FONTANA. Universally incomparable ring-homomorphisms. Bull. Austral. Math. Soc. **29** (1984), 289-302.

[11] M. FONTANA. Topologically defined classes of commutative rings. Ann. Mat. Pura. Appl. **123** (1980), 331-355.

[12] M. FONTANA - L. IZELGUE - S. KABBAJ. Dimension de Krull et dimension valuative des anneaux de la forme $A+XB[X]$. (Soumis pour publication)

[13] M. FONTANA - S. KABBAJ. On the Krull and valuative dimension of $D+(X_1,\ldots,X_r)D_S[X_1,\ldots,X_r]$ domains. J. Pure Appl. Algebra **63** (1990), 231-245.

[14] S. KABBAJ. Quelques problèmes sur la théorie des spectres en algèbre commutative. Thèse de doctorat d'état, Université S.M. Ben Abdellah - Fès, 1989.

[15] S. KABBAJ. Sur les S-domaines forts de Kaplansky. J. Algebra **137** (1991), 400-415.

[16] I. KAPLANSKY. *Commutative rings*. University of Chicago Press. 2nd Ed. (1974).

[17] S. McADAM. Going down in polynomial rings. Can. J. Math. **23** (1971), 704-710.

[18] S. MALIK - J.L. MOTT. Strong S-domains. J. Pure Appl. Algebra **28** (1983), 249-264.

[19] H. MATSUMURA. *Commutative algebra.* Benjamin, 1970.

[20] N. NAKANO. Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörpern. J. Sci. Hiroshima Univ. **16** (1953), 425-439.

[21] T. OGOMA. Fibre products of Noetherian rings and their applications. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **97** (1985), 231-241.

[22] L.J. RATLIFF Jr. On quasi-unmixed local domains, the altitude formula and the chain condition for prime ideals, II. Amer. J. Math. **92** (1970), 99-144.

Received: October 1992