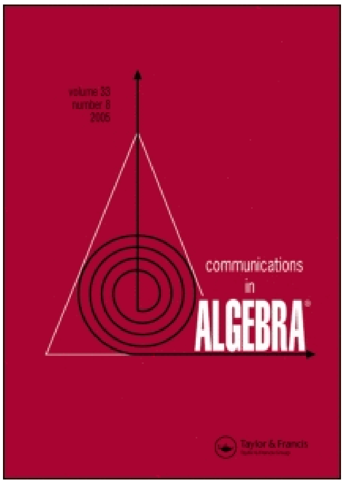

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713597239

Sur quelques propriétés des sous-anneaux de la forme D+I d''un anneau intègre

Marco Fontana [a]; Lahoucine Izelgue [b]; Salah-Eddine Kabbaj [c]
[a] Dipartimento di Matematica, Terza Universita degli Studi di Roma, Roma, Italy [b] Département de Mathematiques, Universite de Marrakech, Marrakech, Marocco [c] Département de Mathematiques et Informatique, Université de Fes, Fés, Marocco

To cite this Article Fontana, Marco, Izelgue, Lahoucine and Kabbaj, Salah-Eddine(1995) 'Sur quelques propriétés des sous-anneaux de la forme D+I d''un anneau intègre', Communications in Algebra, 23: 11, 4189 — 4210
To link to this Article: DOI: 10.1080/00927879508825457
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00927879508825457

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 23(11), 4189–4210 (1995)

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SOUS-ANNEAUX DE LA FORME $D+I$ D'UN ANNEAU INTÈGRE

*Marco Fontana** *Dipartimento di Matematica, Terza Università degli Studi di Roma, 00146 Roma, Italy.*

Lahoucine Izelgue *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences "Semlalia", Université de Marrakech, Marrakech, Marocco.*

Salah-Eddine Kabbaj ** *Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences "Dhar El-Mehraz", Université de Fès, Fès, Marocco.*

0 - INTRODUCTION

Pour encadrer dans une théorie plus générale les différentes classes d'anneaux qui généralisent les anneaux $D+M$, M. Fontana [F] a entrepris une étude systématique des anneaux issus des produits fibrés. Par la suite, P.-J. Cahen a entamé l'étude des couples d'anneaux partageant un idéal [C1], puis il a introduit la notion de construction B, I, D qu'il a longuement étudiée dans [C2]. L'étude de telles constructions s'avère difficile dans le cas général, c'est pourquoi, dans [C2] on s'est limité aux constructions dites *presque-simples* (où tout idéal de B contenant I est maximal). D'important résultats ont alors été établis dans le cadre de la dimension valuative et des notions qui lui sont liées. Notons aussi que S. Visweswaran [V] a indépendament étudié les sous-anneaux de la forme $D+I$ d'une K-algèbre de type fini, avec D un sous-anneau d'un

* travail effectué avec le support partiel du *Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica* et du contrat de recherche du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* CNR 9300856. CT01.
** travail effectué sous les auspices du *Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR)* et *Terza Università degli Studi di Roma.*

corps K. Son étude s'est limitée au transfert des notions d'anneau laskerien, d'anneau noethérien, de N-anneau et de S-domaine fort.

Se basant sur les travaux de Cahen, de Visweswaran et sur les résultats déjà établis sur les produits fibrés, A. Ayache [Ay1 et Ay2] a étudié les sous-anneaux de la forme $D + I$ d'une K-algèbre intègre quotient d'un anneaux de polynômes, ou de séries formelles sur un corps K, par un idéal premier.

Récemment, nous avons étudié les anneaux de la forme $A + XB[X]$, où $A \subset B$ est une extension d'anneaux intègres et X une indéterminée sur B (cf. [FIK1 et FIK2] et [I]). Cela nous a permis de généraliser quelques résultats déjà obtenus sur les anneaux de type $D + XD_S[X]$ [CMZ1] et [FK]. L'ensemble de ces travaux a donné lieu à des exemples de constructions *B, I, D* non nécessairement presque-simples et a permis de généraliser un grand nombre de résultats déjà établis sur les anneaux de type $D + M$ [ABDFK], [CMZ1 et CMZ2], [FK], [K1, K2 et K3]...

On commence par rappeler quelques définitions utiles pour la suite. Un anneau A est dit *caténaire* s'il est localement de dimension finie et si pour tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A, $ht(Q/P) = 1$ entraine $ht\, Q = 1 + ht\, P$. Cette notion n'est pas stable, en général, par passage aux anneaux de polynômes. Ainsi, on dit que A est *universellement caténaire*, si l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ est caténaire pour tout entier naturel $n \geq 0$. Un anneau A est dit un *S(eidenberg)-domaine*, si pour tout idéal premier P de A de hauteur 1, l'idéal premier $P[X]$ est de hauteur 1 dans l'anneau de polynômes $A[X]$. L'anneau A est appelé *S-domaine fort* (respectivement, *S-domaine fort universel*) si pour tout idéal premier P de A, l'anneau quotient A/P est un S-domaine (respectivement, l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ est un S-domaine fort, pour tout entier naturel $n \geq 0$). Un *anneau de Jaffard* A est un anneau de dimension finie tel que sa dimension de Krull coïncide avec sa dimension valuative.

Soient T un anneau intègre, I un idéal non nul de T et D un sous-anneau de T tel que $D \cap I = (0)$. Le présent papier traite de certaines propriétés liées au spectre de l'anneau $R := D + I$ et, plus particulièrement, la S-propriété, la caténarité et la notion d'anneau de Jaffard. Son originalité réside, entre autres, dans la mise au point d'une nouvelle notion, celle de morphisme algébrique modulo un idéal. Cette notion, bien qu'elle soit plus faible que celle de morphisme résiduellement algébrique [FIK2], s'avère idéale pour garantir un transfert bilatéral, entre R et le couple (D, T), de la S-propriété (cf. Théorème 1.7). Nous avons, en outre, procédé à la généralisation (quelquefois à la simplification) d'un certain nombre de résultats déjà établis sur des constructions de type $D + I$ issues d'anneaux intègres particuliers. Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B et n un entier ≥ 1, plusieurs applications aux anneaux du type $A + X^nB[X]$ sont données dans le dernier paragraphe.

1 - LA S-PROPRIETE DANS LES ANNEAUX DE LA FORME $D + I$

Soient T un anneau intègre, I un idéal non nul de T et D un sous-anneau intègre de T tel que $D \cap I = (0)$.

Dans ce qui suit, D *sera identifié* pour plus de simplicité *avec son image dans* T/I. Aussi, on suppose de plus que $\mathrm{ht}_T I$ est fini, bien que cette hypothèse n'est pas toujours indispensable.

On se propose d'étudier l'anneau $R := D + I$. C'est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R := D + I & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T/I \end{array}$$

Comme pour toute construction de produit fibré de ce genre, $\mathrm{Spec}(R)$ est la somme topologique amalgamée de $\mathrm{Spec}(T)$ et de $\mathrm{Spec}(D)$ au dessus de $\mathrm{Spec}(T/I)$ [F, Theorem 1.4].
Plus précisément, nous avons :

LEMME 1.1. *Soient* T *un anneau intègre,* I *un idéal non nul de* T, D *un sous-anneau intègre de* T *tel que* $D \cap I = (0)$ *et* $R := D + I$. *Posons* $\mathfrak{A} := \{Q \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq Q\}$ *et* $\mathfrak{B} := \{Q \in \mathrm{Spec}(R) : I \not\subseteq Q\}$. *Alors* I *est un idéal premier de* R, $\mathrm{Spec}(R) = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ *et les applications canoniques*

$$\mathrm{Spec}(D) \to \mathfrak{A}, \qquad q \mapsto q + I$$
$$\{P \in \mathrm{Spec}(T) : I \not\subseteq P\} \to \mathfrak{B}, \qquad P \mapsto P \cap R$$

sont des isomorphismes d'ensembles ordonnés (pour l'inclusion ensembliste). ■

En ce qui concerne la hauteur de I, dans [C1, Proposition 5, Théorème 1 et Corollaire 1], il est établi que :

(a) $\mathrm{ht}_T I \leq \mathrm{ht}_R I \leq \dim T$.

(b) $\dim D + \mathrm{ht}_R I \leq \dim R \leq \dim T + \dim D$.

(c) $\mathrm{Sup}\{\mathrm{ht}_T P + \dim R/(P \cap R) : P \in \mathrm{Spec}(T),\ I \subseteq P\} \leq \dim R$.

Le lemme suivant permet d'évaluer la hauteur de I en tant qu'idéal premier de R.

LEMME 1.2. *Soient* T *un anneau intègre,* I *un idéal non nul de* T, D *un sous-anneau de* T *tel que* $D \cap I = (0)$ *et* $R := D + I$. *Posons* $\mathfrak{T} := \{P \in \mathrm{Spec}(T):$

$P \cap R = I$ } et $\mathcal{Y} := \{P \in \mathrm{Spec}(T) : I \not\subseteq P$ et il existe $P' \in \mathcal{X}$, $(0) \subset P \subset P'\}$.

(a) *$\mathcal{X}$ n'est pas vide.*

(b) *$\mathcal{Y} = \varnothing$ si et seulement si $\mathrm{ht}_R I = 1$.*

(c) $\mathrm{ht}_R I = 1 + \mathrm{Sup}\{\mathrm{ht}_T P : P \in \mathcal{Y}\}$.

(d) *Soit Z une indéterminée sur T. Si $\mathrm{ht}_{R[Z]} I[Z] = 1$ alors T/P est algébrique sur D, pour tout idéal premier P de T tel que $P \cap R = I$.*

DEMONSTRATION.

(a) L'idéal I est un idéal premier non nul de R. Soit Q un idéal premier de R contenu dans I. D'après [C1, Proposition 4] , il existe $P \subset P'$ dans $\mathrm{Spec}(T)$ tel que $P \cap R = Q$ et $P' \cap R = I$. Par conséquent, $P' \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{X} \neq \varnothing$.

(b) Si $\mathrm{ht}_R I > 1$ alors il existe Q un idéal premier de R tel que $(0) \subset Q \subset I$. D'après [C1, Proposition 4] , il existe $(0) \subset P \subset P'$ dans $\mathrm{Spec}(T)$ tel que $P \cap R = Q$ et $P' \cap R = I$. Il est alors clair que $\mathcal{Y} \neq \varnothing$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{ht}_R I = 1$. Si $\mathcal{Y} \neq \varnothing$, alors ils existent P un idéal premier de T tel que $I \not\subseteq P$ et $P' \in \mathcal{X}$ avec $(0) \subset P \subset P'$. Nous obtenons dans R la chaîne distincte $(0) \subset P \cap R \subset P' \cap R = I$ (voir les isomorphismes du Lemme 1.1). Absurde.

(c) Vu le Lemme 1.1, il est clair que pour tout $P \in \mathcal{Y}$ on a $1 + \mathrm{ht}_T P \leq \mathrm{ht}_R I$. Soit $(0) \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_{n-1} \subset I$ une chaîne d'idéaux premiers de R réalisant $\mathrm{ht}_R I$. Par relèvement dans T on obtient une chaîne de premiers $(0) \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1} \subset P_n$ avec $P_n \cap R = I$ et, pour tout i $(1 \leq i \leq n-1)$, $P_i \cap R = Q_i$ [C1, Proposition 4]. Il en résulte $\mathrm{ht}_R I = 1 + \mathrm{ht}_R Q_{n-1} = 1 + \mathrm{ht}_T P_{n-1}$ (Lemme 1.1). D'où le résultat.

(d) Par l'absurde, supposons qu'il existe un idéal premier P de T tel que $P \cap R = I$ et T/P soit transcendant sur D. Soit x un élément de T tel que $\bar{x} := x + P$ soit transcendant sur D. Considérons dans $T[Z]$ l'idéal premier $\mathcal{P} := \langle P, Z - \bar{x} \rangle$. Puisque $\bar{x}$ est transcendant sur D, alors $Z - \bar{x}$ ne divise (dans $(T/P)[Z]$) aucun polynôme non nul de $D[Z]$.

D'autre part, $Z - x \in (\mathcal{P} \setminus P[Z])$ alors, d'après [DL, Corollary A.1 (a)], il existe $\mathcal{Q}$ un supérieur de (0) dans $T[Z]$ tel que $Z - x \in \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Comme $Z - x$ est un polynôme unitaire de degré 1 , il est clair que $\mathcal{Q} = \langle Z - x \rangle$. Ainsi, d'après le Lemme 1.1, dans $\mathrm{Spec}(R[Z])$ nous avons la chaîne distincte $(0) \subset$ $\subset \mathcal{Q} \cap R[Z] \subset \mathcal{P} \cap R[Z] = IR[Z]$. Contradiction, car l'idéal $IR[Z]$ est de hauteur 1 .■

Nous verrons plus loin (Lemme 1.12) que l'inégalité $\mathrm{ht}_T I \leq \mathrm{ht}_R I$ [C1, Proposition 5] devient une égalité si T est un anneau de valuation.

THEOREME 1.3. *Soient T un anneau intègre, I un idéal non nul de T, D un sous-anneau de T tel que $D \cap I = (0)$ et $R := D + I$. Supposons que T soit un S-*

domaine. Alors, R est un S-domaine si et seulement si $\mathrm{ht}_R I > 1$ *ou T/P est algébrique sur D, pour tout idéal premier P de T tel que $P \cap R = I$.*

DEMONSTRATION.

Supposons que R soit un S-domaine et $\mathrm{ht}_R I = 1$, alors nécessairement $\mathrm{ht}_{R[Z]} I[Z] = 1$. Le Lemme 1.2 (d) permet de conclure.

Réciproquement, si $\mathrm{ht}_R I > 1$, du fait que T est un S-domaine, alors par le Lemme 1.1 il est facile de voir qu'il en est de même pour R.

Supposons maintenant que $\mathrm{ht}_R I = 1$. Soit Q un idéal premier de R de hauteur 1. Deux cas sont possibles.

Cas 1 : $I \not\subseteq Q$.

Le Lemme 1.1 permet de conclure.

Cas 2 : $I \subseteq Q$, donc $I = Q$ (puisque I est un idéal premier non nul de R). Supposons que, pour tout idéal premier P de T tel que $P \cap R = I$, T/P soit algébrique sur D. Soit Y une indéterminée sur T (et R). Si $\mathrm{ht}_{R[Y]} I[Y] > 1$, alors il existe $H \in \mathrm{Spec}(R[Y])$ tel que $(0) \subset H \subset I[Y]$. D'après [C1, Proposition 4], on peut relever la chaîne précédente en une chaîne $(0) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ dans $\mathrm{Spec}(T[Y])$, avec $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ ayant respectivement H et $I[Y]$ pour traces dans $R[Y]$.

Deux cas sont alors possibles pour $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P} = P[Y]$ avec $P := \mathcal{P} \cap T$ et donc $P \cap R = I$. D'après [FIK2, Lemme 1.6 (a)], on voit que P est minimal à vérifier $P \cap R = I$. Or $\mathrm{ht}_T I \leq \mathrm{ht}_R I = 1$, donc $\mathrm{ht}_T I = \mathrm{ht}_T P = 1$ (Lemme 1.2). L'anneau T est un S-domaine, il s'ensuit que $\mathrm{ht}_{T[Y]} P[Y] = 1$. Absurde.

Il reste alors le cas $\mathcal{P} = \langle P, f \rangle$ est un supérieur de $P = \mathcal{P} \cap T$ dans $T[Y]$, où $f \in (T/P)[Y]$ est irréductible dans $\mathrm{Frac}(T/P)[Y]$. De plus, f ne divise aucun polynôme de $D[Y]$ [Mc, Theorem 2 (ii)], car $\mathcal{P} \cap R[Y] = I[Y]$ et, par conséquent, $\mathcal{P} \cap D[Y] = (0)$, ce qui contredit le fait que T/P est algébrique sur D.

Il en résulte que $\mathrm{ht}_{R[Y]} I[Y] = 1$. D'où, R est un S-domaine. ■

Le Théorème 1.3 généralise [FIK2, Théorème 1.1], donc aussi [FK, Corollary 2.2] et [AAZ, Corollary 3.3] (en effet, si $A \subset B$ est une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B et $R := A + XB[X]$, dans ce cas $T = B[X]$ et $I = XB[X]$, alors il suffit de remarquer que $XB[X]$ est le seul idéal premier P de $B[X]$ à vérifier $P \cap R = XB[X]$ [FIK1, Lemma 1.1 et FIK2 Lemme 1.6] et que $B[X]$ est un S-domaine [FK, Proposition 2.1] ou [AAZ, Theorem 3.2]).

Dans la situation décrite au début du paragraphe, on dit que

- *le morphisme* $D \longrightarrow T/I$ est *résiduellement algébrique* si pour tout idéal premier P de T contenant I alors $D/(P \cap D) \longrightarrow T/P$ est algébrique;

- *le morphisme* $D \longrightarrow T$ est *algébrique modulo* I si, dans le cas où I est maximal dans T, alors $D \longrightarrow T/I$ est algébrique. Autrement (i.e. si I n'est pas maximal dans T) si pour tout couple (P, P') d'idéaux premiers de T tel que $I \not\subseteq P$, $P + I \subseteq P'$ et $\mathrm{ht}_{R/(P\cap R)}\,(P'\cap R)/(P\cap R) = 1$ alors $D/(P'\cap D) \longrightarrow T/P'$ est algébrique.

A la différence de la notion de morphisme résiduellement algébrique [FIK2, Lemme 1.4], celle de morphisme algébrique modulo un idéal n'est pas universelle (cf. Exemple 1.8). Ainsi, on dit que

- *le morphisme* $D \longrightarrow T$ est *universellement algébrique modulo* I si le morphisme entre les anneaux de polynômes $D[X_1, ..., X_n] \longrightarrow T[X_1, ..., X_n]$ est algébrique modulo $I[X_1, ..., X_n]$, pour tout $n \geq 0$.

Cette notion, bien qu'elle soit plus faible que celle de morphisme résiduellement algébrique, est suffisante pour garantir le transfert entre R et T (dans les deux sens) de la S-propriété (universelle).

Notons que si le morphisme $D \longrightarrow T/I$ est résiduellement algébrique alors le morphisme $D \longrightarrow T$ est algébrique modulo I. Cependant, la réciproque est en général fausse, comme cela est illustré par l'Exemple 1.4. Nous verrons à la fin du papier un exemple où $D \longrightarrow T$ est universellement algébrique modulo I mais $D \longrightarrow T/I$ n'est pas résiduellement algébrique.

EXEMPLE 1.4. *Soient K un corps et X, Y, Z des indéterminées sur K. Soient $T := K(X)[Y, Z]$, $I := YK(X)[Y, Z]$ et $D := K[X]$. Alors,*

(a) *$D \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.*

(b) *$D \longrightarrow T/I$ n'est pas résiduellement algébrique.*

Posons $R := D + I = K[X] + YK(X)[Y, Z]$.

(a) Soit (P, P') un couple d'idéaux premiers de T tel que $I \not\subseteq P$, $P + I \subseteq P'$ et $\mathrm{ht}_{R/(P\cap R)}((P'\cap R)/(P\cap R)) = 1$. Posons $Q' := P'\cap R$ et $Q := P\cap R$. Tout d'abord, notons que $P' = (p', Y)$ où p' est un idéal premier de $K(X)[Z]$, car $I = YK(X)[Y, Z] \subseteq P'$. De plus, $p'\cap D = (0)$ (par conséquent, $Q' = I$), car $D = K[X]$ et $T/I \cong K(X)[Z]$.

Nous affirmons que $p' \neq (0)$. En effet, d'après le Lemme 1.2 (c) (voir aussi [FIK 1, Theorem 1.2]), $\mathrm{ht}_R I = 2$. Puisque $\mathrm{ht}_{R/Q}(Q'/Q) = \mathrm{ht}_{R/Q}(I/Q) = 1$ (car $Q' = I$), alors nécessairement $Q \neq (0)$. Ainsi, dans $\mathrm{Spec}(R)$ nous avons la chaîne distincte d'idéaux premiers $(0) \subset Q \subset I$. D'après [C1, Proposition 4], cette dernière se relève, dans $\mathrm{Spec}(T)$, en la chaîne $(0) \subset P \subset P'$. Il en résulte que $\mathrm{ht}_T P' \geq 2$ et, par conséquent, $p' \neq (0)$.

D'autre part, $T/P' = K(X)[Z, Y]/(p', Y) \cong K(X)[Z]/p'$ qui est algébrique sur $K(X) = \mathrm{Frac}(D)$. Ayant $P' \cap D = (0)$, il en découle que $D \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.

(b) Il est clair que le morphisme $D = K[X] \longrightarrow T/(YK(X)[Y, Z])$ n'est pas algébrique. ■

Avant d'énoncer notre prochain théorème, nous allons établir le lemme suivant utile par la suite :

LEMME 1.5. *Soit K un corps. Si*

(α) *T est une K-algèbre intègre de type fini*

ou

(β) *(T, M) est une K-algèbre locale noethérienne de la forme $T = K + M$,*

et si I est un idéal non nul de T, alors $K \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.

DEMONSTRATION.

Soit T une K-algèbre de type (α) ou (β). Si I est maximal dans T, il est clair que $K \longrightarrow T/I$ est algébrique (de type fini, dans le cas (α), et l'identité dans le cas (β)). Supposons que I ne soit pas maximal dans T. Soit (P, P') un couple d'idéaux premiers de T tel que $I \not\subseteq P$ et $P + I \subseteq P'$. Posons $R := K + I$, $Q := P \cap R$ et $Q' := P' \cap R$. Du fait que I est maximal dans R, tout idéal premier de T qui contient I se contracte sur I ; en particulier $Q' = I$. Supposons que $\mathrm{ht}_{R/Q}(I/Q) = 1$. Nous affirmons que dans une situation de ce type, $\mathrm{ht}_{T/P}(P'/P) = 1$. En effet, supposons que $\mathrm{ht}_{T/P}(P'/P) \geq 2$. On peut toujours se réduire au cas $\mathrm{ht}_{T/P}(P'/P) = 2$. Alors, T étant un anneau noethérien, d'après [K, Theorem 144] l'ensemble $\{P^* \in \mathrm{Spec}(T) : P \subset P^* \subset P'$ et $\mathrm{ht}_{T/P}(P^*/P) = 1\}$ est infini. Si $x \in I \setminus P$, alors les idéaux premiers minimaux de $T_{P'}/PT_{P'}$ qui contiennent l'élément non nul $\bar{x} := x + PT_{P'}$ forment un ensemble fini. Il s'ensuit qu'on peut trouver un idéal premier P^* dans T tel que $P \subset P^* \subset P'$, $\mathrm{ht}_{T/P}(P^*/P) = 1$ et x n'est pas dans P^*. D'où, $I \not\subseteq P^*$. On obtient donc dans R la chaine distincte d'idéaux premiers $Q = P \cap R \subset P^* \cap R \subset P' \cap R = I$. Il en résulte que $\mathrm{ht}_{R/Q}(I/Q) \geq 2$. Absurde.

De ce qui précéde, on déduit que P' est maximal dans T. Donc, si T est de type (α), le morphisme $K = R/I \longrightarrow T/P'$ est algébrique (car P' est un idéal maximal dans une K-algèbre affine). Si T est de type (β), on a $P' = M$ et $T/M = K$. ■

Notons que si K est un corps et si T est un anneau quotient d'un anneau de séries formelles $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ (avec $n \geq 1$) par un idéal premier, alors T est une K-algèbre de type (β), qui n'est pas de type (α).

PROPOSITION 1.6. *Sous les mêmes hypothèses du* Lemme 1.5, *soit* $R := K + I$. *Supposons en plus* $\dim(T/I) = 0$, *alors* T *est un* R*-module de type fini et, donc,* R *est un domaine noethérien.*

DEMONSTRATION.

Montrons tout d'abord que T est entier sur R, ce qui revient à montrer que $K \longrightarrow T/I$ est entier [F, Corollary 1.5]. Du fait que $\dim(T/I) = 0$, alors $T/\mathrm{rad}_T(I)$ est un produit fini d'extensions algébriques du corps K. Donc, $T/\mathrm{rad}_T(I)$ est entier sur K. Par conséquent, T/I est entier sur K. Si T est de type (α), alors c'est aussi une R-algèbre de type fini. Donc, T étant entier sur R, c'est un R-module de type fini. Si T est de type (β), T/I est un K-espace vectoriel de dimension finie, et donc T est un R-module de type fini [F, Corollary 1.5]. ■

THEOREME 1.7. *Soient* T *un anneau intègre,* I *un idéal non nul de* T, D *un sous-anneau de* T *tel que* $D \cap I = (0)$ *et* $R := D + I$.

(**a**) *Supposons que* T *soit un S-domaine fort. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) R *est un S-domaine fort;*

(ii) D *est un S-domaine fort et* $D \longrightarrow T$ *est algébrique modulo* I.

(**b**) *Supposons que* T *soit un S-domaine fort universel. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) R *est un S-domaine fort universel;*

(ii) D *est un S-domaine fort universel et* $D \longrightarrow T$ *est universellement algébrique modulo* I.

DEMONSTRATION.

(**a**), (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $Q \subset Q'$ deux idéaux premiers consécutifs de R. Trois cas sont possibles.

Cas 1 : $I \not\subseteq Q'$, alors le Lemme 1.1 permet de conclure par le fait que T est un S-domaine fort.

Cas 2 : $I \subseteq Q$, la conclusion s'ensuit du Lemme 1.1 et du fait que D est un S-domaine fort, car D est isomorphe à R/I.

Cas 3 : $I \not\subseteq Q$ et $I \subseteq Q'$. Si $Q[Y] \subset Q'[Y]$ ne sont pas consécutifs dans $\mathrm{Spec}(R[Y])$, il existe $H \in \mathrm{Spec}(R[Y])$ tel que

$$Q[Y] \subset H \subset Q'[Y]. \qquad (©)$$

Nécessairement, $I \not\subseteq H$ et par conséquent $H := \langle Q, f\rangle$ est un supérieur de Q dans $R[Y]$ avec f un élément de $(R/Q)[Y]$ qui est irréductible dans $\mathrm{Frac}(R/Q)[Y] \cong \mathrm{Frac}(T/P)[Y]$, où $P \cap R = Q$. D'après [C1, Propositon 4], la chaîne (©) se relève dans $T[Y]$ en une chaîne

$$\mathcal{P}'' \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$$

avec $\mathcal{P}'' \cap R[Y] = Q[Y]$, $\mathcal{P} \cap R[Y] = H$ et $\mathcal{P}' \cap R[Y] = Q'[Y]$. Comme l'idéal $\mathcal{P}$ ne contient pas $I[Y]$, alors le Lemme 1.1 permet de conclure que $\mathcal{P}'' = P[Y]$ et [Mc, Theorem 2 (i)] que $\mathcal{P} = \langle P, \tilde{f} \rangle$, avec $\tilde{f}$ un élément de $(T/P)[Y]$, qui est associé à f dans $\mathrm{Frac}(T/P)[Y]$. Maintenant, si $P' := \mathcal{P}' \cap T$, alors il n'est pas possible que $\mathcal{P}' = P'[Y]$, car T est un S-domaine fort et $P \subset P'$ sont consécutifs dans T. (Cette dernière affirmation découle aisément du fait que $D \longrightarrow T$ est algébrique modulo I et de [FIK2, Lemme 1.6 (a)].) Par conséquent $\mathcal{P}' = \langle P', g \rangle$ est un supérieur de P' avec $P' \cap R = Q'$, $g \in (T/P')[Y]$ est irréductible dans $\mathrm{Frac}((T/P')[Y])$ et ne divise aucun polynôme de $\mathrm{Frac}(R/Q')[Y]$ [Mc, Theorem 2 (ii)]. Ce qui est absurde, puisque T/P' est algébrique sur R/Q'. Il en découle que $\mathrm{ht}\, Q'[Y]/Q[Y] = 1$. Par conséquent, R est un S-domaine fort.

(a), (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si R est un S-domaine fort, il en est de même de $D \cong R/I$, car cette notion est stable par passage au quotient [MM].

Si I est maximal dans T, il découle directement de [C2, Proposition 6] que $D \longrightarrow T/I$ est algébrique. Si I n'est pas maximal, supposons qu'il existe dans T un couple (P, P') d'idéaux premiers tel que $I \not\subseteq P$, $P + I \subseteq P'$, $\mathrm{ht}_{R/(P \cap R)}((P' \cap R)/(P \cap R)) = 1$ et $D/(P' \cap D) \longrightarrow T/P'$ ne soit pas algébrique. Posons $Q := P \cap R$ et $Q' := P' \cap R$. Puisque R est un S-domaine fort, alors $\mathrm{ht}_{R[Y]/Q[Y]}\, Q'[Y]/Q[Y] = 1$. Or, le morphisme $D/(P' \cap D) \cong R/Q' \longrightarrow T/P'$ n'est pas algébrique. Donc, pour un certain $\bar{x} := x + P'$ dans T/P' (avec $x \in T$), le polynôme $Y - \bar{x}$ ne divise (dans $(T/P')[Y]$) aucun polynôme non nul de $(R/Q')[Y]$. De [Mc, Theorem 2], il résulte que $\langle P', Y - \bar{x} \rangle$ est un supérieur de P' dans $T[Y]$ tel que, $\langle P', Y - \bar{x} \rangle \cap R[Y] = Q'[Y]$. D'où la chaîne distincte $P[Y] \subset P'[Y] \subset \langle P', Y - \bar{x} \rangle$ dans $\mathrm{Spec}(T[Y])$. Cette dernière se contracte dans $R[Y]$ en la chaîne $Q[Y] \subset Q'[Y]$. D'après [DL, Corollary A.1.(a)], il existe un idéal $\langle P, g \rangle$ supérieur de P dans $T[Y]$ tel que $P[Y] \subset \langle P, g \rangle \subset \langle P', Y - \bar{x} \rangle$ (donc, $I[Y] \not\subseteq \langle P, g \rangle$). D'après le Lemme 1.1 appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccc} R[Y] := (D+I)[Y] & \longrightarrow & D[Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ T[Y] & \longrightarrow & (T/I)[Y] \end{array}$$

nous obtenons, dans $R[Y]$, la chaîne distincte $Q[Y] \subset \langle P, g \rangle \cap R[Y] \subset Q'[Y]$. Absurde, car $\mathrm{ht}\, Q'[Y]/Q[Y] = 1$; donc $D \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.

(b) Découle aisément de (a). ■

Nous sommes enfin en mesure de fournir un exemple illustrant le fait que la notion de morphisme algébrique modulo un idéal n'est pas universelle. Pour le voir, nous allons reprendre une construction de [BHMR] (cf. aussi [ABDFK, Example 3.8]).

EXEMPLE 1.8. Soient K un corps, X_1, X_2 et X_3 des indéterminées sur K.

Posons

$V := K(X_1, X_2) + X_3K(X_1, X_2)[X_3]_{(X_3)} = K(X_1, X_2) + M_0$,

où $M_0 := X_3K(X_1, X_2)[X_3]_{(X_3)}$.

Soit $f : V \longrightarrow V/M_0$ la surjection canonique et soit $V^* = K + M^*$ l'anneau de valuation discrète de $K(X_1, X_2)$ décrit dans [ABDFK, Example 3.8] et soit $V_1 := f^{-1}(V^*)$; V_1 est un anneau de valuation de $K(X_1, X_2, X_3)$ de dimension 2 de la forme $V_1 = K + M_1$. Soit P_1 son idéal premier de hauteur 1.

Posons

$W := K(X_1, X_2) + (X_3 + 1)K(X_1, X_2)[X_3]_{(X_3 + 1)} = K(X_1, X_2) + M_2$

où $M_2 := (X_3 + 1)K(X_1, X_2)[X_3]_{(X_3 + 1)}$, et

$T := V_1 \cap W$.

Alors, dans [BHMR] il est établi que T est un anneau de Prüfer semi-local de dimension 2 d'idéaux maximaux $M := M_2 \cap T$ et $N := M_1 \cap T$ et que $\mathrm{ht}_T M = 1$ et $\mathrm{ht}_T N = 2$. Ainsi Spec(T) est formé des deux chaîne distinctes

$$(0) \subset M \quad \text{et} \quad (0) \subset P \subset N, \quad \text{où } P := P_1 \cap T.$$

Posons $I := M \cap N$ et $R := K + I$. Alors, nous affirmons que :

(a) $K \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.

(b) $K[Z] \longrightarrow T[Z]$ n'est pas algébrique modulo $I[Z]$, où Z est une indéterminée sur T (donc aussi sur K).

En effet, $\mathrm{Spec}(T) = \{(0) \subset M, (0) \subset P \subset N\}$ et nous avons,

$$M \cap R = N \cap R = I \quad \text{et} \quad (0) \subset P \cap R \subset I.$$

Ainsi, $\mathrm{ht}_R (M \cap R) = \mathrm{ht}_R I = 2 > 1$ et $\mathrm{ht}_{R/(P \cap R)} (N \cap R)/(P \cap R) = \mathrm{ht}_{R/(P \cap R)} I/(P \cap R) = 1$. Comme T/N est canoniquement isomorphe à K, alors $K \longrightarrow T/N$ est algébrique. Il s'ensuit que $K \longrightarrow T$ est algébrique modulo I.

D'autre part, $R[Z] = K[Z] + I[Z]$ est tel que $K[Z]$ et $T[Z]$ sont des S-domaines forts, car K est un corps et T est un anneau de Prüfer. Cependant, $R[Z]$ n'est pas un S-domaine fort [BHMR]. Alors, du Théorème 1.7 (a) on déduit que $K[Z] \longrightarrow T[Z]$ n'est pas algébrique modulo $I[Z]$. ■

Si I est un idéal maximal de T, le théorème précédent concerne les constructions classiques des $D + M$ et il devient:

COROLLAIRE 1.9. *Soient T un anneau intègre, M un idéal maximal de hauteur finie de T et D un sous-anneau intègre de T tel que $D \cap M = (0)$. Posons $K := T/M$ et $R := D + M$. On a:*

(a) *R est un S-domaine fort si et seulement si T et D sont des S-domaines forts et K est algébrique sur D.*

(b) *Si T est un S-domaine fort universel, alors R est un S-domaine fort universel si et seulement si D est un S-domaine fort universel et K est algébrique sur D.*

DEMONSTRATION.

Il faut seulement remarquer que, dans le cas présent, où M est un idéal maximal de T, si R est un S-domaine fort, alors T est nécessairement un S-domaine fort (Lemme 1.1). ■

Nous précisons, cependant, que la partie (a) du Corollaire résulte directement de [C2, Proposition 6] (cf. aussi [Ay1, Proposition 2.10.(ii)]). Quant à la partie (b), elle recouvre [K3, Théorème 1.1].

Comme applications, Théorème 1.7.(a) (respectivement, (b)) présente une version achevée de [FIK2, Théorème 1.7] (respectivement, [FIK2, Théorème 1.3]). De plus, il permet de retrouver comme corollaires quelques récents résultats de Ayache [Ay1] et de Visweswaran [V] :

COROLLAIRE 1.10. [Ay1, Proposition 1.8]. *Soient K un corps et T une K-algèbre, quotient par un idéal premier d'un anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ ou de séries formelles $K[[X_1, \dots, X_n]]$, à coefficients dans K, avec $n \geq 1$. Soient I un idéal propre non nul de T et $R := K + I$. Alors, R est un S-domaine fort.*

DEMONSTRATION.

Lemme 1.5 et Théorème 1.7 (a) permettent de conclure. ■

COROLLAIRE 1.11. [V, Proposition 3.1]. *Soient K un corps, T une K-algèbre de type fini intègre, I un idéal propre non nul de T et D un sous-anneau de K. Alors, $R := D + I$ est un S-domaine fort si et seulement si D est un S-domaine fort et K est algébrique sur D.*

DEMONSTRATION.

Considérons le diagramme commutatif de morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} R := D + I & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ R' := K + I & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T/I \end{array}$$

D'après le Corollaire 1.10, R' est un S-domaine fort. La conclusion découle du Théorème 1.7 (a). ■

Nous allons clore ce paragraphe en examinant les $D + I$ issus d'un anneau de valuation.

LEMME 1.12. *Soient V un domaine de valuation, I un idéal non nul de V, D un sous-anneau de V tel que $D \cap I = (0)$ et $R := D + I$. Alors:*

(a) *Pour tout $P \in \mathrm{Spec}(V)$ tel que $I \not\subseteq P$, on a $P \cap R \subset I$.*

(b) $\mathrm{ht}_R\, I = \mathrm{ht}_V\, I$.

(c) $\dim R = \dim D + \mathrm{ht}_V\, I$.

DEMONSTRATION.

C'est une conséquence du Lemme 1.1 et du fait que, dans un anneau de valuation, l'ensemble des idéaux est totalement ordonné. ■

Le Lemme 1.12 (c) généralise [F, Proposition 2.1 (5)] (voir aussi [ABDFK, Lemma 2.1.(d)]).

THEOREME 1.13. *Soient V un domaine de valuation, I un idéal non nul de V, D un sous-anneau de V tel que $D \cap I = (0)$, P_0 l'idéal premier minimal à contenir I dans V. Posons $R := D + I$ et $K_0 := \mathrm{Frac}(V/P_0)$, alors:*

(1) $\dim_v R = \dim_v D + \dim V_{P_0} + \text{deg.tr.}_D\, K_0$.

(2) $\dim R[Z_1, \ldots, Z_n] = \dim D[Z_1, \ldots, Z_n] + \dim V_{P_0} + \inf(n, \text{deg.tr.}_D\, K_0)$, *pour toute famille d'indéterminées $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ et pour tout $n \geq 1$.*

(3) *R est un anneau de Jaffard si et seulement si D est un anneau de Jaffard et K_0 est algébrique sur D.*

(4) *Pour toute famille d'indéterminées $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, $R[Z_1, \ldots, Z_n]$ est un anneau de Jaffard si et seulement si $D[Z_1, \ldots, Z_n]$ est un anneau de Jaffard et $n \geq \text{deg.tr.}_D\, K_0$.*

(5) *R est un S-domaine si et seulement si $\mathrm{ht}_R\, I > 1$ ou $\text{deg.tr.}_D\, K_0 = 0$.*

(6) *R est caténaire (respectivement, un S-domaine fort) si et seulement si D est caténaire (respectivement, un S-domaine fort et K_0 est algébrique sur D).*

(7) *R est universellement caténaire (respectivement, un S-domaine fort universel) si et seulement si D est universellement caténaire (respectivement, un S-domaine fort universel) et K_0 est algébrique sur D.*

La démonstration repose, en partie, sur le lemme suivant :

LEMME 1.14. *Soient T un anneau intègre, I un idéal non nul de T et D un sous-anneau de T tel que $D \cap I = (0)$. Supposons que $\mathrm{rad}_T(I) =: P_0$ soit un idéal premier divisé de T. Posons $R := D + I$* et *$R_0 := D + P_0$.*

(a) *L'inclusion $R \to R_0$ est un homomorphisme entier.*

(b) *$P_0 \cap R = I$ (donc $P_0 \cap D = (0)$).*

(c) *L'application continue $\mathrm{Spec}(R_0[Z_1, \ldots, Z_n]) \to \mathrm{Spec}(R[Z_1, \ldots, Z_n])$ est un homéomorphisme, pour toute famille d'indéterminées $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ et pour tout entier naturel* n .

(d) *L'idéal $P_0 = P_0 T_{P_0}$ est un idéal commun à R_0 et T_{P_0}.*

DEMONSTRATION.

(a) Résulte du fait que tout élément de P_0 est entier sur I.

(b) D'après [C1, Proposition 4], il existe un idéal premier P de T tel que $P \cap R = I$. L'idéal $P_0 = \mathrm{rad}_T(I)$ étant divisé dans T, nécessairement on a $P_0 \subset P$ [A, Theorem 3] (ou [BS, Theorem 2.4]). Il en résulte que $P_0 \cap R = I$.

(c) L'idéal I étant aussi un idéal de R_0, on a le produit fibré suivant:

$$\begin{array}{ccc} R[Z_1,\ldots,Z_n] & \longrightarrow & (R/I)[Z_1,\ldots,Z_n] = D[Z_1,\ldots,Z_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_0[Z_1,\ldots,Z_n] & \longrightarrow & (R_0/I)[Z_1,\ldots,Z_n] = R_0[Z_1,\ldots,Z_n]/I[Z_1,\ldots,Z_n] \end{array}$$

D'autre part, on a

$$\big((R_0/I)[Z_1, \ldots, Z_n]\big)_{\mathrm{red}} = (R_0/P_0)[Z_1, \ldots, Z_n] = D[Z_1, \ldots, Z_n] .$$

Par conséquent, l'application canonique

$$\mathrm{Spec}((R_0/I)[Z_1, \ldots, Z_n]) \to \mathrm{Spec}(D[Z_1, \ldots, Z_n])$$

est un homéomorphisme. Du fait que $\mathrm{Spec}(R[Z_1, \ldots, Z_n])$ est une somme amalgamée [F, Theorem 1.4], on déduit que l'application canonique

$$\mathrm{Spec}(R_0[Z_1, \ldots, Z_n]) \to \mathrm{Spec}(R[Z_1, \ldots, Z_n])$$

est aussi un homéomorphisme.

(d) L'idéal P_0 étant un idéal premier divisé de T et $P_0 \cap D = (0)$, il est aisé de vérifier que R_0 est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R/P_0 = D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T/P_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{P_0} & \longrightarrow & k(P_0) = T_{P_0}/P_0T_{P_0} \end{array}$$

■

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.13.

Posons $R_0 := D + P_0$. Nous observons d'abord que dans un anneau de valuation, tout idéal premier est divisé, donc en particulier pour $P_0 = \mathrm{rad}_V(I)$. Ainsi, nous avons les produits fibrés suivants :

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & R/I = D & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ R_0 & \longrightarrow & R_0/I & \longrightarrow & R_0/P_0 = D \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & V/I & \longrightarrow & V/P_0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ V_{P_0} & \longrightarrow & V_{P_0}/IV_{P_0} & \longrightarrow & k(P_0) = V_{P_0}/P_0V_{P_0} \end{array}$$

Il en résulte que $R_0 = D + P_0$ est un anneau de type "$D + M$" issu de l'anneau de valuation V_{P_0}. Tandis que R satisfait aux hypothèses du Lemme 1.14.

(1) $\dim_v R = \dim_v R_0$ (Lemme 1.14 (a) et [G, Proposition 30. 13])
$= \dim_v D + \dim V_{P_0} + \text{deg.tr.}_D K_0$ [ABDFK, Theorem 2.6 (a)].

(2) $\dim R[Z_1, \ldots, Z_n] = \dim R_0[Z_1, \ldots, Z_n]$ (Lemme 1.12 (c))
$= \dim D[Z_1, \ldots, Z_n] + \dim V_{P_0} + \inf(n, \text{deg.tr.}_D K_0)$
[ABDFK, Corollary 2.8].

(3) découle aisément de [ABDFK, Proposition 1.1 et Theorem 2.6 (b)] et du Lemme 1.14.(a).

(4) découle aisément de [ABDFK, Proposition 1.1], du Lemme 1.14.(a) et de [Ay1, Proposition 2.9].

(5) découle du Théorème 1.3. En effet, V est un S-domaine (car de valuation) et, si V_{P_0} est algébrique sur D, P_0 est l'unique idéal premier de V tel que $P_0 \cap R = I$ [FIK2, Lemme 1.6 (a)].

(6) et (7). Notons que du Lemme 1.14.(c) découle immédiatement que R est un S-domaine fort (respectivement: caténaire, S-domaine fort universel, universellement

caténaire) si et seulement si R_0 est un S-domaine fort (respectivement: caténaire, S-domaine fort universel, universellement caténaire). Ainsi, le reste découle directement du Corollaire 1.9 (a) (respectivement: de [Ay 1, Proposition 2.10 (i)], du Corollaire 1.9.(b), de [ADKM, Corollary 2.4]). ■

2 - DIMENSION VALUATIVE D'UN ANNEAU $D+I$ ISSU D'UN ANNEAU DE POLYNÔMES $B[X]$

Dans ce paragraphe B désigne un anneau intègre de corps des fractions K, X une indéterminée sur K, D un sous-anneau de B et I un idéal non nul de $B[X]$ disjoint de $B\setminus\{0\}$. Les résultats principaux de ce paragraphe concernent la dimension valuative et le transfert de la notion d'anneau de Jaffard pour $R := D+I$, sous-anneau de $B[X]$. Soulignons ainsi que la situation examinée ici est différente de celle étudiée par Ayache [Ay1] qui a considéré des $D+I$ issus d'une K-algèbre, K étant un corps. Le théorème suivant donne la dimension valuative de l'anneau $R = D+I$ et généralise [FIK1, Theorem 2.3].

THEOREME 2.1. *Soient B un anneau intègre, X une indéterminée sur B, D un sous-anneau de B et I un idéal non nul de $B[X]$, avec $I \cap B = (0)$. Posons $R := D+I$, donc*

$$\begin{array}{ccc}
R = D+I & \longrightarrow & D \\
\downarrow & & \downarrow \\
B+I & \longrightarrow & B \\
\downarrow & & \downarrow \\
B[X] & \longrightarrow & B[X]/I
\end{array}$$

Alors,

(a) $\dim_v R = \dim_v D + \text{deg.tr.}_D B + 1$.

(b) *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *D est un anneau de Jaffard et B est algébrique sur D;*

(ii) *R est un anneau de Jaffard et* $\dim R = 1 + \dim D$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.2. *Soient D un anneau intègre, K un corps contenant* $\text{Frac}(D)$ *et J un idéal propre non nul de $K[X]$. Posons $R := D+J$, donc*

$$\begin{array}{ccc} R = D + J & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ K + J & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ K[X] & \longrightarrow & K[X]/J \end{array}$$

Nous avons:

(a) $\dim(D+J) = 1 + \dim D$ *et* $\dim_v(D+J) = 1 + \text{deg.tr.}_D K + \dim_v D$.

(b) *$D+J$ est un anneau de Jaffard si et seulement si D est un anneau de Jaffard et K est algébrique sur D.*

DEMONSTRATION.

Comme tout idéal de $K[X]$ contenant J est maximal, alors on a à faire à une construction B, I, D simple [C2]. L'affirmation **(a)** est alors une conséquence de [C2, Théorème 1]; **(b)** résulte de **(a)**. ■

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1.

(a) Elle se fait par récurrence sur $d := \text{deg.tr.}_D B$.

Étape 1: B est algébrique sur D, i. e. $d = 0$.

Soit $u \in I$, $u \neq 0$, et soit K le corps des fractions de R (et B), alors $D[u] \subset R \subset B[X] \subset K(X)$. Or $K(X)$ est algébrique sur $D[u]$, alors $\dim_v D[u] \geq \dim_v R$ c'est à dire $\dim_v D + 1 \geq \dim_v R$ car u est transcendant sur D. Soit maintenant V un K-suranneau de valuation de D tel que $\dim_v D = \dim V$. Alors $R = D + I \subset V + J \subseteq K(X)$, où $J := S^{-1}I$. D'après le Lemme 2.2, $\dim_v (V+J) = \dim_v V + 1$. Puisque $K(X)$ est le corps des fractions de R et de $V+J$, il en résulte que $\dim_v R \geq \dim_v (V+J) = \dim V + 1 = \dim_v D + 1$. Par conséquent, $\dim_v R = \dim_v D + 1$.

Étape 2 : $d = \text{deg.tr.}_D B = 1$.

Soit y un élément de B transcendant sur D, alors B est algébrique sur $D[y]$ et sur $D[y^{-1}]$. Considérons ensuite les anneaux $A_1 := R[y] = D[y] + I[y]$ et $A_2 := R[y^{-1}] = D[y^{-1}] + I[y^{-1}]$. Alors $I[y]$ (respectivement, $I[y^{-1}]$) est un idéal de $B[X]$ (respectivement, $B[y^{-1}][X]$) disjoint de $B \setminus \{0\}$ (respectivement, $B[y^{-1}] \setminus \{0\}$). De plus B (respectivement, $B[y^{-1}]$) est algébrique sur $D[y]$ (respectivement, $D[y^{-1}]$). Ainsi, nous sommes dans les conditions de l'Étape 1, et il s'ensuit que $\dim_v R[y] = \dim_v D[y] + 1 = \dim_v D + 2$ et $\dim_v R[y^{-1}] = \dim_v D[y^{-1}] + 1 = \dim_v D + 2$. D'autre part, il est clair que $\dim_v R = \text{Sup}\{\dim_v R[y], \dim_v R[y^{-1}]\}$. Par conséquent, $\dim_v R = \dim_v D + 2 = \dim_v D + d + 1$.

Étape 3 : $d = \text{deg.tr.}_D B > 1$.

Hypothèse de récurrence: Supposons que pour tout sous-anneau D de B tel que $r = \text{deg.tr.}_D B \leq d - 1$ on ait $\dim_v R = \dim_v D + r + 1$.
Soit y un élément de B transcendant sur D, alors $\text{deg.tr.}_{D[y]} B = \text{deg.tr.}_{D[y^{-1}]} B[y^{-1}] = d - 1$. Comme dans l'Étape 2, si $A_1 := R[y] = D[y] + I[y]$ et $A_2 = R[y^{-1}] = D[y^{-1}] + I[y^{-1}]$, alors $\dim_v A_1 = \dim_v D[y] + (d - 1) + 1 = \dim_v D + d + 1$ et $\dim_v A_2 = \dim_v D[y^{-1}] + (d - 1) + 1 = \dim_v D + d + 1$. Il en résulte que $\dim_v R = \text{Sup}\{\dim_v A_1, \dim_v A_2\} = \dim_v D + d + 1$.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si B est algébrique sur D, alors d'après [FIK2, Lemme 1.6], pour tout P idéal premier de B on a $P \cap D \neq (0)$. Dans ce cas on a $\text{ht}_R I = 1$. Sinon, par le Lemme 1.2, il existerait dans $B[X]$ une chaîne d'idéaux premiers de type $(0) \subset P \subset P'$, avec $I \not\subseteq P$ et $P' \cap R = I$, et par conséquent $P' \cap D = (0)$. Absurde.
Il en résulte que,

$$\begin{aligned}\dim_v R &= \dim_v D + 1\\ &= \dim D + 1\\ &= \dim D + \text{ht}_R I\\ &\leq \dim R \quad \text{[C1, Théorème 1]}\\ &\leq \dim_v R.\end{aligned}$$

D'où R est un anneau de Jaffard et $\dim R = 1 + \dim D$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)
$$\begin{aligned}\dim_v R &= \dim_v D + d + 1\\ &= \dim R\\ &= \dim D + 1.\end{aligned}$$

Or $\dim_v D \geq \dim D$, par conséquent D est un anneau de Jaffard et B est algébrique sur D. ■

Comme application immédiate du Théorème 2.1, nous avons :

REMARQUE 2.3. Dans [Ay1, Lemme 1.3], il est établi que si K est un corps, B une K-algèbre intègre de type fini et I un idéal propre non nul de B, alors l'anneau $R := K + I$ est un anneau de Jaffard. On peut se demander si ce résultat reste valable dans le cas général où B est une K-algèbre qui n'est pas de type fini. La réponse est négative si la dimension valuative de R n'est pas finie [Ay1, Exemple 1.6]. Si $\dim_v R < \infty$, la réponse demeure encore négative, comme le justifie l'exemple suivant:

EXEMPLE 2.4.

Soient K un corps, X_1, X_2, X_3, X_4 des indéterminées sur K, $B := K(X_1, X_2)[X_3, X_4]$, $I := X_4 B$ et $R := K + I$.
L'anneau R est caténaire équicodimensionnel et I est un idéal maximal de R de

hauteur 2 [Ay1, Proposition 1.2], donc l'anneau R est un S-domaine (Théorème 1.3). D'autre part, B n'est pas une K-algèbre de type finie, et d'après [FIK1, Théorème 2.1 et Théorème 2.3], $\dim R = \dim B = 2$ et $\dim_v R = 4$. Par conséquent, R n'est pas un anneau de Jaffard.

3 - APPLICATIONS AUX ANNEAUX DE TYPE $A + X^n B[X]$

Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B et n un entier ≥ 1 , ici les anneaux de type $A + X^n B[X]$ sont des cas particuliers des anneaux $D + I$. Ainsi, comme application directe du Théorème 2.1, nous avons :

PROPOSITION 3. 1. *Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B et* n *un entier ≥ 1. Posons $R_n := A + X^n B[X]$, alors:*

(a) $\dim_v R_n = \dim_v A + \text{deg.tr.}_A B + 1$.

(b) *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est un anneau de Jaffard et B est algébrique sur A ;*

(ii) *R_n est un anneau de Jaffard et* $\dim R_n = 1 + \dim A$. ■

Dans la suite nous allons étudier le transfert aux anneaux $A + X^n B[X]$ de certaines propriétés liées à la structure du spectre. Bien que certains énoncés peuvent être déduits directement des résultats précédemment établis, nous allons les démontrer en utilisant le lemme suivant, jettant la lumière sur la liaison étroite entre les spectres premiers -en tant qu'ensembles ordonnés- des anneaux $R_n = A + XB^n[X]$, pour $n \geq 1$:

LEMME 3.2. *Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B. Pour tout entier $n \geq 1$ posons $R_n := A + X^n B[X]$, alors:*

(a) *Pour tout $m \geq n \geq 1$, l'inclusion $R_m \to R_n$ est un homomorphisme entier.*

(b) *Pour tout $m \geq n \geq 1$ et pour tout $r \geq 0$ et pour toute famille d'indéterminées $\{Z_1, \ldots, Z_r\}$, l'application naturelle*

$$\lambda : \mathrm{Spec}(R_n[Z_1, \ldots, Z_r]) \to \mathrm{Spec}(R_m[Z_1, \ldots, Z_r]) , \; P \mapsto P \cap R_m$$

est un isomorphisme d'ordre.

DEMONSTRATION.

(a) Soient Y une indéterminée sur R_m et $p(Y) := Y^m - X^{nm} \in R_m[Y]$, alors $p(X^n) = 0$. Par conséquent, X^n est entier sur R_m . Il s'ensuit que R_n est entier sur R_m .

(b) Soit $Z_\bullet := \{Z_1, \cdots, Z_r\}$, nous avons les produits fibrés suivants:

$$\begin{array}{ccccc}
R_n[Z_\bullet] & \to & (R_n[Z_\bullet]/X^nB[X][Z_\bullet]) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
R_1[Z_\bullet] & \to & R_1[Z_\bullet]/X^nB[X][Z_\bullet] & \to & (R_1[Z_\bullet]/XB[X][Z_\bullet]) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B[X][Z_\bullet] & \to & B[X][Z_\bullet]/X^nB[X][Z_\bullet] & \to & B[X][Z_\bullet]/XB[X][Z_\bullet])
\end{array}$$

où $(R_n[Z_\bullet]/X^nB[X][Z_\bullet]) \cong A[X]$ et $(R_1[Z_\bullet]/XB[X][Z_\bullet]) \cong A[X]$, et où $B[X][Z_\bullet]/XB[X][Z_\bullet]) \cong B[X]$.

Considérons

$$\mathcal{A}_n := \{P \in \mathrm{Spec}(R_n[Z_\bullet] : X^n \notin P\},$$

$$\mathcal{B}_n := \{P \in \mathrm{Spec}(R_n[Z_\bullet] : X^n \in P\}.$$

Soit $S := \{X^{nk} : k \geq 0\}$, c'est une partie multiplicative de R_n et de $B[X]$ telle que $S^{-1}R_n[Z_\bullet] = S^{-1}B[Z_\bullet][X] = B[Z_\bullet][X, X^{-1}]$. On en déduit que l'application naturelle :

$$\mathrm{Spec}(B[Z_\bullet][X, X^{-1}]) = \mathrm{Spec}(S^{-1}R_n[Z_\bullet]) \longrightarrow \mathcal{A}_n$$

est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

D'autre part nous avons déjà observé que $R_1[Z_\bullet]/X^nB[Z_\bullet][X]$ est isomorphe à $A[Z_\bullet]$, il en résulte que l'application naturelle :

$$\mathrm{Spec}(A[Z_\bullet]) \longrightarrow \mathcal{B}_n$$

est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. La conclusion découle du fait que $\mathrm{Spec}(R_n[Z_\bullet]) = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$ (Lemme 1.1). ■

COROLLAIRE 3.3. *Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux intègres, X une indéterminée sur B et n un entier ≥ 1 . Posons $R_n := A + X^nB[X]$, alors :*

(a) *R_n est un S-domaine si et seulement si $\mathrm{ht}_{R_1}XB[X] > 1$ ou B est algébrique sur A .*

(b) *R_n est un S-domaine fort si et seulement si A et $B[X]$ sont des S-domaines forts et $A \longrightarrow B[X]$ est algébrique modulo $XB[X]$.*

(c) *R_n est un S-domaine fort universel si et seulement si A et $B[X]$ sont des S-domaines forts universels et $A \longrightarrow B[X]$ est universellement algébrique modulo $XB[X]$.*

DEMONSTRATION.

(a) C'est une conséquence du Théorème 1.3 , car $B[X]$ est toujours un S-domaine [FK, Proposition 2.1] ou [AAZ, Theorem 2.3] et, en plus, $XB[X]$ est l'unique idéal premier de $B[X]$ à vérifier $XB[X] \cap R_n = X^nB[X]$.

(b) Supposons que R_1 soit un S-domaine fort et considérons la partie multiplicative $S := \{X^m, m \geq 0\}$. On a $S^{-1}R_1 = S^{-1}B[X] = B[X, X^{-1}]$. La notion de S-domaine fort est stable par localisation, donc $B[X, X^{-1}]$ est un S-domaine fort.

D'autre part, $B[X, X^{-1}]$ est entier sur $B[X+X^{-1}] \cong B[X]$. D'après [MM, Theorem 4.6], $B[X+X^{-1}]$ (donc, aussi $B[X]$) est un S-domaine fort. Le reste découle du Théorème 1.7. Quant au transfert entre R_1 et R_n, il est garanti par le Lemme 3.2 (b).

(c) Raisonnement analogue à celui du (b). ■

Jusque là, l'anneau $R := \mathbb{Z} + X\mathbb{Z}[Y][X]$ est connu comme étant de dimension 3, équicodimensionnel, caténaire et totalement de Jaffard [Ay 2, Ch. I, Lemme 2.15 - 2.17, Proposition 2.18 et 2.19]. L'exemple suivant, montre que R est en fait un S-domaine fort universel. Il fournit en outre une meilleure illustration pour le Théorème 1.7, n'étant pas vérifiée l'hypothèse d'incomparabilité suggérée par [FIK2, Théorème 1.3].

EXEMPLE 3.4.
Soint X et Y deux indéterminées sur l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. Les anneaux $R_n := \mathbb{Z} + X^n\mathbb{Z}[Y][X]$, pour $n \geq 1$, constituent une suite décroissante de S-domaines forts universels.

Il s'agit de montrer que pour tout entier naturel r et $Z_1, \ldots, Z_r$ des indéterminées sur R_n, l'anneau $R_n[Z_1, \ldots, Z_r] = \mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r] + X^n\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$ est un S-domaine fort. Pour ce faire, montrons d'abord que

$$\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r] \longrightarrow \mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$$

est algébrique modulo $X^n\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$.
Soient alors $P \subset P'$ deux idéaux premiers de $\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$ tels que $X^n \in P' \setminus P$ et $\mathrm{ht}_{R_n/(P\cap R_n)} (P'\cap R_n)/(P\cap R_n) = 1$.
Posons $Q := P\cap R_n$ et $Q' := P'\cap R_n$. Puisque $\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$ est un anneau noethérien et $P \subset P'$ est un relèvement de $Q \subset Q'$ dans $\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$, donc d'après [Ay 1, Lemme 1.1] (voir aussi la démonstration du Lemme 1.5), $\mathrm{ht}\, P'/P = 1$.
Il en résulte que P' est maximal au dessus de Q'. On en déduit que $P' = \langle p', f\rangle$, où $p' := P'\cap\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r] \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r])$ et f est un polynôme de $(\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r]/p')[X]$.
D'autre part, d'après le Lemme 1.1, $Q' = q' + X^n\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$ où $q' := p'\cap\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r]$. D'après ce qui précède, p' est nécessairement maximal au dessus de q', donc $p' = \langle q', h\rangle$ est un supérieur de q' dans $\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r][Y]$ (h est un polynôme de $(\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r]/q')[Y]$). De [BDF, Lemma 4.4], il résulte que $\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r]/q' \longrightarrow \mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r]/p'$ est algébrique. D'où, $\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r] \longrightarrow \mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$ est algébrique modulo $X^n\mathbb{Z}[Y][Z_1, \ldots, Z_r][X]$. Puisque $\mathbb{Z}$ est un S-domaine fort universel, car nothérien, alors du Theorème 1.7, il s'ensuit que R_n est un S-domaine fort universel.

BIBILIOGRAPHIE

[A] T. AKIBA. A note on AV-domains. Bull. Kyoto Univ. B **31** (1967), 1 -3.

[AAZ] D. D. ANDERSON - D. F. ANDERSON - M. ZAFRULLAH. Rings between $D[X]$ and $K[X]$. Houston J. Math. **17** (1991), 109-129.

[ABDFK] D.F. ANDERSON - A. BOUVIER - D.E. DOBBS - M. FONTANA - S. KABBAJ. On Jaffard domains. Expo. Math. **6** (1988), 145-175.

[Ay1] A. AYACHE. Sous-anneaux de la forme $D+I$ d'une K-algèbre intègre. Portugaliae Math. **50** (1993), 139-149.

[Ay2] A. AYACHE. Inégalité ou formule de la dimension et produits fibrés. Thèse de doctorat en sciences, Université d'Aix-Marseille, 1991.

[ACE] A. AYACHE - P.-J. CAHEN - O. ECHI. Intersection de produits fibrés et formule de la dimension. *Preprint.*

[BG] E. BASTIDA - R. GILMER. Overrings and divisorial ideals of rings of the form $D+M$. Michigan Math. J. **20** (1973), 79-95.

[BDF] A. BOUVIER - D. DOBBS - M. FONTANA. Universally catenarian integral domains. Adv. Math. **72** (1988), 211-238.

[BK] A. BOUVIER - S. KABBAJ. Examples of Jaffard domains. J. Pure Appl. Algebra **54** (1988), 155- 165.

[BHMR] J. BREWER - W. HEINZER - P. MONTGOMERY - E. RUTTER. Krull dimension of polynomial rings. Springer Lecture Notes Math. **311** (1972), 26-45.

[BR] J. W. BREWER - E. A. RUTTER. $D+M$ construction with general overrings. Michigan Math. J. **23** (1976) 33-42.

[C1] P.-J. CAHEN. Couple d'anneaux partageant un idéal. Arch. Math. **51** (1988), 505-514.

[C2] P.-J. CAHEN. Constructions B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. Arch. Math. **54** (1990) 125-141.

[CMZ1] D. COSTA - J.L. MOTT - M. ZAFRULLAH. The construction $D+XD_S[X]$. J. Algebra **53** (1978), 423-439.

[CMZ2] D. COSTA - J. L. MOTT - M. ZAFRULLAH. Overrings and dimension of general $D+M$ construction. J. Nat. Sci. & Math. **26** (1986), 7-14.

[DL] A. M. DE SOUZA DOERING - Y. LEQUAIN. Chains of prime ideals in polynomial rings. J. Algebra **78** (1982), 163-180.

[E] O. ECHI. C-anneaux, E-anneaux et formule de la dimension. Portugaliae Math. **50** (1993), 277-295.

[F] M. FONTANA. Topologically defined classes of commutative rings. Ann. Mat. Pura. Appl. **123** (1980), 331-355.

[FIK1] M. FONTANA - L. IZELGUE - S. KABBAJ. Krull and valuative dimension of the rings of the form $A + XB[X]$. Proc. Fès Conference "Commutative ring theory", Lect. Notes Pure Appl. Math. **153**, M. Dekker , 1993, 111-130.

[FIK2] M. FONTANA - L. IZELGUE - S. KABBAJ. Quelques propriétés des chaînes d'idéaux premiers dans les anneaux $A + XB[X]$. Comm. Algebra **22** (1994), 9-24.

[FK] M. FONTANA - S. KABBAJ. On the Krull and valuative dimension of $D + (X_1,..., X_r)D_S[X_1,...,X_r]$ domains. J. Pure App. Algebra **63** (1990), 231-245.

[G] R. GILMER. *Multiplicative ideal theory.* M. Dekker, New York, 1972.

[I] L. IZELGUE. Dimension de Krull et dimension valuative des anneaux de la forme $A + XB[X]$. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Univ. S.M. Ben Abdellah, Fès, 1992.

[J] P. JAFFARD. Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes. Mém. Sc. Math. **146**, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[K1] S. KABBAJ. La formule de la dimension pour les S-domaines forts universels. Boll. Un. Mat. Ital. (Algebra e Geometria) **5** (1986), 145-161.

[K2] S. KABBAJ. Quelques problèmes sur la théorie des spectres en algèbre commutative. Thèse de doctorat d'état, Université de Fès, Fès, 1989.

[K3] S. KABBAJ. Sur les S-domaines forts de Kaplansky. J. Algebra **137** (1991), 400-415.

[Kp] I. KAPLANSKY. *Commutative rings.* The University of Chicago Press (2^{nd} print), 1974.

[Mc] S. McADAM. Going down in polynomial rings. Can. J. Math. **23** (1971), 704-710.

[MM] S. MALIK - J. L. MOTT. Strong S-domains. J. Pure. Appl. Algebra **28** (1983) 249-264.

[O] T. OGOMA. Fibre products of Noetherian rings and their applications. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **97** (1985), 231.

[V] S. VISWESWARAN. Subrings of $K[Y_1,...,Y_t]$ of the type $D + I$. J. Algebra **117** (1988), 374-389.

Received: September 1994

Revised: May 1995