

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Tutorato 4 - 22 Marzo 2010
Elisa Di Gloria

ESERCIZI DA SVOLGERE IN CLASSE

Esercizio 1.

Dimostrare che ogni numero naturale ha la stessa cifra finale della sua quinta potenza.

Esercizio 2.

Provare che se p è un primo, $p \neq 2, 3, 5$, allora p divide il numero $u_p = 111 \dots 1$, costituito da $p - 1$ cifre uguali ad 1.

Esercizio 3.

Provare che se 7 non divide n , allora 7 divide $n^{12} - 1$

Esercizio 4.

Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi di congruenze, trovandone la più grande delle soluzioni negative.

$$(a) \begin{cases} X \equiv 4 \pmod{5} \\ X \equiv 5 \pmod{6} \\ X \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2X \equiv -1 \pmod{5} \\ 5X \equiv 1 \pmod{6} \\ 7X \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2X \equiv -1 \pmod{3} \\ 3X \equiv 2 \pmod{4} \\ 5X \equiv 2 \pmod{6} \end{cases}$$

Esercizio 5.

Siano n ed m due interi positivi distinti e coprimi. Provare che:

$$n^{\varphi(m)} + m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{mn}$$

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1.

Bisogna spedire un pacco da affrancare con 10 euro e disponiamo solo di francobolli da 3 e 5 euro. E' possibile? In quanti modi si potrà affrancare un pacco da 17 euro?

Esercizio 2.

Calcolare le seguenti potenze:

$$3^{51} \pmod{10} \quad 15^{43} \pmod{24} \quad 7^{62} \pmod{31}$$

Esercizio 3.

Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^{13} - n$ è divisibile per 2,3,5,7,13.

Esercizio 4.

Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi di congruenze.

$$(a) \begin{cases} 3X \equiv 2 \pmod{4} \\ 2X \equiv 7 \pmod{15} \\ 4X \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -X \equiv 5 \pmod{6} \\ 3X \equiv 1 \pmod{5} \\ 4X \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2X \equiv 5 \pmod{3} \\ 21X \equiv 14 \pmod{35} \\ 4X \equiv 12 \pmod{14} \end{cases}$$

Esercizio 5.

Un fruttivendolo deve sistemare poco meno di un migliaio di arance sui suoi banconi, ma disponendole in gruppi di 3 gli avanzano 2 frutti, in gruppi di 4 gliene avanzano 3, in gruppi di 5 ne rimangono 4, in gruppi di 6 ne rimangono 5. Finalmente, riesce a sistemarli in gruppi di 7.

Quante sono le arance?

Esercizio 6.

Risolvere, se possibile, le seguenti equazioni diofantee:

- $X + 4Y + 2Z = 2$;
- $3X + 4Y + 6Z = 2$;
- $2X + 3Y + 2Z = 4$;
- $3X + 5Y - 4Z = 120$