

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010**  
**TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri**  
**Tutorato 3 - 15 Marzo 2010**  
**Elisa Di Gloria**

**ESERCIZI DA SVOLGERE IN CLASSE**

**Esercizio 1.**

Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:

$$(a) \begin{cases} 5X \equiv 7 & (\text{mod } 9) \\ 9X \equiv 8 & (\text{mod } 13) \\ 11X \equiv 15 & (\text{mod } 20) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 7X \equiv 2 & (\text{mod } 10) \\ 2X \equiv 9 & (\text{mod } 11) \\ 5X \equiv 4 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

**Esercizio 2.**

Calcolare le seguenti potenze:

$$4^{15}(\text{mod } 13); \quad 7^{62}(\text{mod } 45); \quad 128^{24}(\text{mod } 33).$$

**Esercizio 3.**

Sia  $a = 3254543789076$ . Determinare la classe di congruenza di  $a$  e di  $a^2$  modulo 4.

**Esercizio 4.**

Trovare, al variare di  $\lambda$  fra 0 e 6, le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2X + 3Y \equiv 5 & (\text{mod } 7) \\ X + \lambda Y \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

**Esercizio 5.**

Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo  $n$  si ha che  $42|n^7 - n$ .

## ESERCIZI PER CASA

### Esercizio 1.

Trovare per quali valori del parametro  $\lambda$  le seguenti equazioni diofantee sono risolubili, e risolvere ciascuna di esse per il piú piccolo valore positivo di  $\lambda$ :

(a)  $5X + (3\lambda + 1)Y = 10$

(b)  $12X + 48Y = (5\lambda + 1)$

### Esercizio 2.

Trovare, al variare di  $\lambda$  fra 0 e 6, le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 3X - \lambda Y \equiv 6 \pmod{7} \\ X + 2Y \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

### Esercizio 3.

Provare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{6} \\ X \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

non possiede soluzioni.

### Esercizio 4.

Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare le ultime due cifre nell'espansione decimale di  $7^{1000}$ .