Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Tutorato 12 - 27 Maggio 2010
Elisa Di Gloria

Esercizio 1.
Determinare per quali valori del parametro λ, $0 \leq \lambda \leq 12$, la seguente congruenza è risolubile:

$$9X^2 + (4 - 12\lambda)X + \lambda^2 - 8\lambda + 4 \equiv 0 \pmod{13}$$

e per ogni valore di λ trovato, determinare esplicitamente la soluzione.

Esercizio 2.
Per ognuna delle seguenti congruenze, stabilire se è risolubile ed in caso positivo risolverla:

(a) $5X^3 \equiv 8 \pmod{11}$;

(b) $19X^4 \equiv 12 \pmod{5}$;

(c) $2^X \equiv 7 \pmod{9}$;

(d) $25X^3 \equiv 51 \pmod{13}$;

(e) $4^X \equiv 17 \pmod{9}$;

(f) $3X^2 \equiv 11 \pmod{8}$.

Esercizio 3.

(a) Determinare per quali interi a, $1 \leq a \leq 14$ tali che MCD$(a, 15)$=1 si ha

$$\left(\frac{a}{15}\right) = 1$$

(b) Determinare per quali interi a, $1 \leq a \leq 14$, relativamente primi con 15, la congruenza $X^2 - a \equiv 0 \pmod{15}$ è risolubile.

Esercizio 4.
Mostrare che se p è un primo tale che $p \equiv 9 \pmod{28}$, allora $\left(\frac{7}{p}\right) = 1$

Esercizio 5.
Elencare tutte le terne pitagoriche primitive positive (x, y, z) con $x, y, z \leq 85$.

Esercizio 6.
Trovare tutte le 10 soluzioni di $X^2 + 2Y^2 = 162$.

Esercizio 7.
(a) Mostrare che le seguenti congruenze:
(i) $X^2+(X+1)^2+(X+2)^2 \equiv 0 \pmod{10}$, **(ii)** $(X+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$
sono equivalenti (cioè, un intero $a \in \mathbb{Z}$ è soluzione di **(i)** se e soltanto se a è soluzione di **(ii)**).
[Suggerimento: determinare due interi α *e beta in modo tale che si possa scrivere* $X^2 + (X + 1)^2 + (X + 2)^2 = \alpha(X + 1)^2 + \beta$*]* **(b)**Utilizzando **(a)**, determinare tutti gli interi naturali multipli di 10 che si possono scrivere come somma di tre quadrati di interi consecutivi.
[Suggerimento: utilizzare le soluzioni di ***(ii)****, notando ad esempio che* $50 = 3^2 + 4^2 + 5^2$ *e* $110 = 5^2 + 6^2 + 7^2$ *dove 3 e 5 sono tra le soluzioni di* ***(ii)****.]*