

Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

a.a. 2006/2007

Gabriele Fusacchia e Valeria Pucci

15 Maggio 2007 - Tutorato IX

(1) Mostrare che se p è un qualsiasi primo dispari allora:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{8-p}{p}\right) = \left(\frac{p}{p-8}\right) = \left(\frac{2}{p-8}\right)$$

(2) Data l'equazione

$$X^3 - 7Y + 1 = 0$$

stabilire se essa è risolubile, e in tal caso determinarne tutte le soluzioni.

(3) Siano a e b interi positivi, tali che $(a, b) = 1$. Mostrare che, se a non è somma di due quadrati di numeri interi, allora ab non è somma di due quadrati di interi.

(4) Mostrare che l'equazione

$$X^4 - 4Y^4 = Z^2$$

non ha soluzioni negli interi *positivi*.

(Suggerimento: riscrivere l'equazione nella forma: $(2Y^2)^2 + Z^2 = (X^2)^2$)

(5) Mostrare che l'equazione

$$1/X^4 + 1/Y^4 = 1/Z^4$$

non ammette soluzioni intere.

(Suggerimento: si supponga per assurdo che esista una soluzione (a, b, c) e si moltiplichino entrambi i membri dell'equazione per un opportuno fattore)