

Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

a.a. 2006/2007

Gabriele Fusacchia e Valeria Pucci

22 Maggio 2007 - Tutorato X

(1) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{7+\lambda}{253}\right)$ per $0 \leq \lambda \leq 2$

(2) Data la congruenza quadratica

$$X^2 \equiv 7 + \lambda \pmod{253}$$

determinarne, per $0 \leq \lambda \leq 2$, le eventuali soluzioni.

(3) Mostrare che se p è un primo dispari del tipo $x^2 + 2$, allora p non può dividere un intero n della forma $y^2 - 2$

(Suggerimento: si supponga che un tale n esista; allora p divide $n + p = x^2 + y^2$)

(4) Chiamiamo *triangolo pitagorico* un triangolo rettangolo avente i lati di lunghezza intera.

(a) Mostrare che non esistono triangoli pitagorici isosceli.

(Suggerimento: supporre per assurdo che un tale triangolo esista, e mostrare che uno dei suoi lati è divisibile infinite volte per 2)

(b) Dedurre da (a) che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(5) Mostrare che:

(a) Un numero naturale $n = 4k$, $k \geq 1$, è somma di tre quadrati di interi se, e soltanto se, k gode della stessa proprietà.

(b) Se $n = 2^k$, $k \geq 1$, allora n non si può scrivere come somma di tre quadrati di interi.