Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

a.a. 2006/2007
Gabriele Fusacchia e Valeria Pucci
27 Febbraio 2007 - Tutorato I

Definiamo le seguenti funzioni aritmetiche: per ogni $n \geq 1$,

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \qquad \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Indichiamo inoltre con ϕ la funzione di Eulero, e con μ la funzione di Möbius.

(1) Mostrare le seguenti proprietà di τ, σ e ϕ:

(a) se $n = 2^{k-1}$, con $k \geq 2$, allora $\sigma(n) = 2n - 1$;

(b) se $p = 2^k - 1$ è primo, allora $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ è tale che $\sigma(n) = 2n$;

(c) dimostrare che non esiste n tale che $\sigma(n) = 45$

(d) dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, $\sum_{d|n}(\tau(d))^3 = \left(\sum_{d|n}\tau(d)\right)^2$

(e) dimostrare che $\phi(n^2) = n\phi(n)$;

(f) dimostrare che, se $n|m$, allora $\phi(nm) = n\phi(m)$;

(g) dimostrare che, se $n|m$, allora $\phi(n)\phi(m) = \phi(nm)\phi(n)/n$;

(2) Mostrare che, se f e g sono funzioni aritmetiche moltiplicative, allora $f * g$ è ancora moltiplicativa.

(3) Definiamo le seguenti funzioni aritmetiche: per ogni $n \geq 1$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\tau(d) \qquad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\sigma(d)$$

Determinare il valore di $f(n)$ e $g(n)$ per ogni $n \geq 1$.

(4) Definiamo le seguenti funzioni aritmetiche: per ogni $n \geq 1$,

$$F(n) = \sum_{d|n} \sigma\left(\frac{n}{d}\right)\tau(d) \qquad G(n) = \sum_{d|n} \sigma\left(\frac{n}{d}\right)\phi(d)$$

(a) calcolare $F(60)$ e $G(90)$;

(b) determinare due funzioni aritmetiche f e g tali che $F = f * 1$ e $G = g * 1$ (dove 1 è la funzione costante di valore 1). Calcolare $f(28)$ e $g(15)$.

(5) Sia f una funzione moltiplicativa, non costantemente nulla. Mostrare che:

(a) se n è privo di fattori quadratici, allora $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$;

(b) per ogni primo p, $f^{-1}(p^2) = (f(p))^2 - f(p^2)$;

(c) f è totalmente moltiplicativa $\Leftrightarrow f^{-1} = \mu f$.

(si assuma di sapere che l'inversa di una funzione moltiplicativa non costantemente nulla è moltiplicativa)