

Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Studi in Matematica, A.A. 2009/2010
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
14 maggio 2010
Martina Lanini

1. (*Esonero 6 aprile 2009*). Quali tra le seguenti funzioni aritmetiche sono moltiplicative? Quali totalmente moltiplicative? Motivare le risposte.

(a) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$

(b) $f(n) = n^3$;

(c) $f(n) = |\{p \text{ primo } | p|n\}|$;

(d) $f(n) = n - 1$.

2. Si dimostri che

a) $\tau(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto;

b) $\sigma(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto o il doppio di un quadrato perfetto;

c) per $n > 2$, $\phi(n)$ è pari.

3. Sia $f(n) := |\{p \text{ primo } | p|n\}|$. Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la funzione $g_z(n) := z^{f(n)}$ è moltiplicativa.

Calcolare inoltre $(g_i * \mu)(28)$ e $(g_i * \mu)(60)$.

4. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \sigma * \varphi$.

(a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.

(b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.