Capitolo 8

Un teorema di approssimazione

In questo capitolo ci proponiamo di esaminare alcune proprietà relative ad anelli di valutazione discreta di un medesimo campo.

Proposizione 8.1. *Siano* $(A_1, \mathfrak{m}_1)$ *e* $(A_2, \mathfrak{m}_2)$ *due DVR di un medesimo campo* K. *Allora:*

$$A_1 \subseteq A_2 \quad \textit{con} \quad A_2 \neq K \Rightarrow A_1 = A_2.$$

Dimostrazione. Basta fare vedere che $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ (infatti: $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \iff \mathcal{U}(A_1) = \mathcal{U}(A_2) \iff A_1 = A_2$).

$$y \in \mathfrak{m}_2 \Rightarrow y^{-1} \notin A_2 \Rightarrow y^{-1} \notin A_1 \Rightarrow (y^{-1})^{-1} = y \in \mathfrak{m}_1.$$

Quindi $\mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{m}_1$. Pertanto:

$$y \in \mathfrak{m}_2 \Rightarrow y \in \mathfrak{m}_1 = t_1 A_1 \quad (\text{con } t_1 \text{ uniformizzante}),$$

dunque:

$$y = t_1^n u \quad \text{con} \quad u \in \mathcal{U}(A_1) \subseteq \mathcal{U}(A_2).$$

Se $t_1 \notin \mathfrak{m}_2$, allora $t_1 \in \mathcal{U}(A_2)$ e quindi $y \in \mathcal{U}(A_2)$ mentre $y \in \mathfrak{m}_2$. Pertanto, $t_1 \in \mathfrak{m}_2$ quindi $t_1 A_2 \subseteq \mathfrak{m}_2$. In conclusione $\mathfrak{m}_1 = t_1 A_1 \subseteq t_1 A_2 \subseteq \mathfrak{m}_2$. □

Osservazione 8.2. La conclusione della Proposizione 8.1 vale anche per anelli di valutazione di dimensione 1, come segue dall'equivalenza (non dimostrata), $(i) \Leftrightarrow (iii)$ dell'Osservazione 7.15 3, pag. 63, del capitolo precedente. Si noti anche che la prima parte della dimostrazione precedente mostra che se $(V_1, \mathfrak{m}_1)$ e $(V_2, \mathfrak{m}_2)$ sono anelli di valutazione di K: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{m}_1$.

Proposizione 8.3. *Siano* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *dei DVR di un medesimo campo,* $n \geq 2$. *Supponiamo che:*

$$A_i \neq A_j \quad \textit{per} \quad 1 \leq i \neq j \leq n; \; A_i \neq K, \; \forall i.$$

Denotiamo con

$$\mathrm{ord}_{A_i} : K \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$$

*la valutazione discreta normalizzata associata ad A_i, $i = 1, \dots, n$.
Allora, esiste sempre almeno un elemento $z \in K$ in modo tale che:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{A_1}(z) \gneq 0 \quad \textit{(diremo che } z \textit{ ha uno zero in } A_1\textit{);} \\ &\mathrm{ord}_{A_i}(z) \lneq 0 \quad \textit{(diremo che } z \textit{ ha un polo in } A_i\textit{);} \end{aligned}$$

per $i = 2, \dots, n$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
Se $n = 2$, allora, non essendoci alcuna inclusione tra A_1 e A_2 (cfr. Proposizione 8.1), possiamo trovare $f, g \in K$ in modo tale che:

$$f \in A_1,\ f \notin A_2,\ g \in A_2,\ g \notin A_1.$$

Poniamo $z := \frac{f}{g}$. Allora:

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{A_1}(z) &= \mathrm{ord}_{A_1}(f) - \mathrm{ord}_{A_1}(g) \gneq 0; \\ \mathrm{ord}_{A_2}(z) &= \mathrm{ord}_{A_2}(f) - \mathrm{ord}_{A_2}(g) \lneq 0. \end{aligned}$$

(Ricordiamo che se A è un DVR di un campo K ed $h \in K$:

$$\mathrm{ord}_A(h) \begin{cases} \geq 0 & \Longleftrightarrow \quad h \in A \\ < 0 & \Longleftrightarrow \quad h \in K \setminus A.) \end{cases}$$

Ipotesi induttiva: Supponiamo di aver trovato due elementi $z, y \in K$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{A_1}(z) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{ord}_{A_i}(z) < 0 \quad \text{per} \quad 2 \leq i \leq n-1; \\ &\mathrm{ord}_{A_1}(y) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{ord}_{A_n}(y) < 0. \end{aligned}$$

Allora, l'elemento $w := z + y^r$ con $r \gg 0$ è un elemento che verifica le conclusioni annunciate. Infatti:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{A_1}(z + y^r) \geq \min\left(\mathrm{ord}_{A_1}(z),\ r \cdot \mathrm{ord}_{A_1}(y)\right) > 0, \text{per ogni } r; \\ &\text{se } 2 \leq i \leq n-1, \\ &\mathrm{ord}_{A_i}(z + y^r) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{ord}_{A_i}(z), & \text{se } \mathrm{ord}_{A_i}(y) \geq 0 \text{ per ogni } r \\ r \cdot \mathrm{ord}_{A_i}(y), & \text{se } \mathrm{ord}_{A_i}(y) < 0 \text{ per } r \gg 0 \end{array} \right\} < 0; \end{aligned}$$

infine:

$$\mathrm{ord}_{A_n}(z + y^r) = r\mathrm{ord}_{A_n}(y), \text{ per } r \gg 0.$$

(Si è applicata la seguente proprietà delle valutazioni:

$$v(x) > v(y) \Rightarrow v(x + y) = v(y).)$$

□

Corollario 8.4. *Conserviamo le notazioni e le ipotesi della Proposizione 8.3. Data comunque una famiglia di interi positivi* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *allora esiste sempre (almeno) un elemento* $z \in K$ *in modo tale che:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{A_1}(z-1) \geq m_1; \\ &\mathrm{ord}_{A_i}(z) \geq m_i, \ \textit{per}\ 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $z \in K$ tale che:

$$\mathrm{ord}_{A_1}(z) > 0 \text{ e } \mathrm{ord}_{A_i}(z) < 0 \text{ per } 2 \leq i \leq n$$

(cfr. Proposizione 8.3). Sia:

$$z' := \frac{1}{(1+z^s)} \quad \text{con} \quad s \gg 0.$$

Mostriamo che z' soddisfa alle conclusioni annunciate. Innanzitutto:

$$\mathrm{ord}_{A_i}(1+z^s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \mathrm{ord}_{A_i}(z) \geq 0, \ \forall s \\ s \cdot \mathrm{ord}_{A_i}(z), & \text{se} \quad \mathrm{ord}_{A_i}(z) < 0 \ \forall s \end{cases}$$

dunque:

$$\mathrm{ord}_{A_i}\left(\frac{1}{(1+z^s)}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \mathrm{ord}_{A_i}(z) \geq 0, \ \forall s \\ -s \cdot \mathrm{ord}_{A_i}(z), & \text{se} \quad \mathrm{ord}_{A_i}(z) < 0 \ \forall s. \end{cases}$$

Pertanto, se $2 \leq i \leq n$, allora $\mathrm{ord}_{A_i}(z) =: \nu_i < 0$, quindi basta prendere $s = s'$ in modo tale che:

$$-s'\nu_i \geq m_i \quad \forall i, \ 2 \leq i \leq n.$$

Se, invece, $i = 1$, allora

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{A_1}(z'-1) &= \mathrm{ord}_{A_1}\left(z^s(1+z^s)^{-1}\right) = \\ &= s \cdot \mathrm{ord}_{A_1}(z) - \mathrm{ord}_{A_1}(1+z^s) = \\ &= s \cdot \mathrm{ord}_{A_1}(z). \end{aligned}$$

Quindi, per $s = s''$ tale che $s'' \cdot \mathrm{ord}_{A_1}(z) \geq m_1$, abbiamo $\mathrm{ord}_{A_1}(z'-1) \geq m_1$. Basterà prendere $s \geq \max(s', s'')$, per ottenere l'elemento $z' \in K$ soddisfacente alle conclusioni del Corollario. □

Teorema 8.5. *Dati n anelli di valutazione discreta distinti e propri* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *di un medesimo campo* K, $n \geq 2$, *e presi comunque* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ *ed un intero* N, *allora esiste sempre (almeno) un elemento* $z \in K$ *in modo tale che:*

$$\mathrm{ord}_{A_i}(z - a_i) > N, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dimostrazione. Per ogni i, $1 \leq i \leq n$, utilizzando il Corollario 8.4, possiamo trovare un elemento $z_i \in K$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} &z_i - 1 \quad \text{ha uno zero di ordine elevato in } A_i \\ &z_i \quad \text{ha uno zero di ordine elevato in } A_j, \ j \neq i \end{aligned}$$

Consideriamo l'elemento

$$z := \sum_{i=1}^{n} a_i z_i.$$

Allora, $z \in K$ verifica le conclusioni del Teorema in quanto:

$$z - a_i = a_1 z_1 + \cdots + a_{i-1} z_{i-1} + a_i(z_i - 1) + a_{i+1} z_{i+1} + \cdots + a_n z_n$$

dunque:

$$\mathrm{ord}_{A_i}(z - a_i) \geq \min \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{ord}_{A_i}(a_j) + \mathrm{ord}_{A_i}(z_j), & 1 \leq j \neq i \leq n \\ \mathrm{ord}_{A_i}(a_i) + \mathrm{ord}_{A_i}(z_i - 1) & \end{array} \right.$$

Essendo $\mathrm{ord}_{A_i}(z_j) \gg 0$ e $\mathrm{ord}_{A_i}(z_i - 1) \gg 0$, possiamo facilmente rendere $\mathrm{ord}_{A_i}(z - a_i) > N$ per ogni i. □

Osservazioni 8.6. (a) Il teorema precedente è chiamato anche *Teorema di approssimazione per una famiglia finita di DVR.* Tale denominazione può risultare più chiara scrivendo la conclusione del Teorema 8.5 nella seguente forma equivalente:
$z \in K$ è una soluzione del seguente sistema di congruenze (nell'incognita Z):

$$\left\{ \begin{array}{l} Z \equiv a_i \mod (t_i^{N+1}) \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

(b) Si può dimostrare un teorema analogo per valutazioni (non necessariamente discrete): *Data una famiglia finita $V_1, V_2, \ldots, V_n$ di anelli di valutazione propri di un campo K, $n \geq 2$, con V_i indipendente da V_j, $1 \leq i \neq j \leq n$ (cioè, l'anello generato da V_i e V_j è tutto K), dati comunque $a_1, \ldots, a_n \in K$ e $\nu_1 \in \Gamma_1, \ldots, \nu_n \in \Gamma_n$ (dove Γ_i è il gruppo di valori di v_i), allora esiste almeno un elemento $z \in K$ in modo tale che:*

$$v_i(z - a_i) \geq \nu_i \qquad 1 \leq i \leq n.$$

(cfr. [B-85b, Ch. 6, Par. 7, N° 2, pag. 130 e segg.]).

Prima di chiudere il capitolo vogliamo dimostrare un'utile conseguenza del Teorema 8.5.

Proposizione 8.7. *Sia E un'estensione di un campo K. Sia v una valutazione discreta non banale di K, con gruppo di valori Γ. Siano Γ_i, $1 \leq i \leq n$, i gruppi di valori di n valutazioni (non equivalenti) v_i di E, che estendono v. Se*

$$e_i := e(v_i, v) := [\Gamma_i : \Gamma]$$

allora risulta:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \leq [E : K]$$

Dimostrazione. Supponiamo che tutti i gruppi di valori abbiano notazione additiva. Per ogni i ($1 \leq i \leq n$) scegliamo in E degli elementi

$$z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_{e_i}^{(i)}$$

in modo tale che:

1. $v_i\left(z_h^{(i)}\right)+\Gamma \neq v_i\left(z_k^{(i)}\right)+\Gamma$, per $1 \leq h \neq k \leq e_i$;

2. $\operatorname{ord}_{v_j}\left(z_h^{(i)}\right) > N$, per $j \neq i$ e $1 \leq h \leq e_i$.

dove N è un intero positivo prefissato e ord_{v_j} è la normalizzata della valutazione v_j ($1 \leq j \leq n$, $j \neq i$). È chiaro, per la definizione stessa di e_i, che esistono degli elementi $z_h^{(i)} \in E$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq h \leq e_i$, che verificano la condizione 1. Inoltre, utilizzando la non equivalenza delle v_i (ovvero il fatto che gli anelli di valutazione discreta A_{v_i} di E sono tutti distinti), possiamo fare in modo che anche la condizione 2 sia soddisfatta tramite il Teorema 8.5.
Per concludere basta dimostrare che:

$$\left\{ z_h^{(i)} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq h \leq e_i \right\}$$

è un insieme di elementi linearmente indipendenti sopra K. Supponiamo che si abbia:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{e_i} c_h^{(i)} z_h^{(i)} = 0 \tag{8.1}$$

con $c_h^{(i)} \in K$, non sempre zero. Allora, a meno di un possibile riordinamento degli indici, possiamo supporre che

$$v_1\left(c_1^{(1)}\right) \leq v_1\left(c_h^{(i)}\right)$$

presi comunque $1 \leq i \leq n, 1 \leq h \leq e_i$. Pertanto, a meno di dividere l'espressione (8.1) per la costante nonzero $c_1^{(1)}$ di K, possiamo supporre che in (8.1) si abbia:

$$c_1^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad v\left(c_h^{(i)}\right) \geq 0.$$

Ora,

$$v_1\left(\sum_{h=1}^{e_1} c_h^{(1)} z_h^{(1)}\right) = v_1\left(-\sum_{i=2}^{n}\sum_{h=1}^{e_i} c_h^{(i)} z_h^{(i)}\right) \tag{8.2}$$

con

$$v_1\left(z_1^{(1)} + c_2^{(1)} z_2^{(1)} + \cdots + c_{e_1}^{(1)} z_{e_1}^{(1)}\right) < \infty$$

essendo $v_1\left(c_h^{(1)} z_h^{(1)}\right) \neq v_1\left(c_k^{(1)} z_k^{(1)}\right)$, con $1 \leq h \neq k \leq e_1$, per la condizione 1 (cfr. Proposizione 3.12).
D'altro lato il secondo membro di (8.2) è un elemento di Γ_1 che possiamo rendere grande quanto vogliamo per la condizione 2 (per $N \gg 0$). $\square$

In particolare dalla Proposizione 8.7 si ricava immediatamente il seguente:

Corollario 8.8. *Sia E un'estensione finita di un campo K e sia v una valutazione discreta non banale di K. Allora, esistono un numero finito $r \geq 1$ di valutazioni (discrete) di E, $v_1, \ldots, v_r$ non equivalenti, che estendono v (cioè, $v_i\,|_K = v$, per $1 \leq i \leq r$) ed, inoltre,*

$$\sum_{i=1}^{r} e(v_i, v) \leq [E:K]\,.$$

Dimostrazione. Conseguenza diretta della Proposizione 8.7 e del Corollario 4.16. □

Osservazioni 8.9. (a) Anche se noi non avremo bisogno di un tale risultato, segnaliamo che il Corollario 8.8 può essere migliorato nello spirito della Proposizione 5.6 (e nel caso di valutazioni non necessariamente discrete) e cioè:

Sia E un'estensione finita di un campo K. Allora, ogni sistema completo di estensioni $\{ v_i : E \to (\Gamma_i)_\infty \mid i \in I\}$ di v ad E (cioè, ogni estensione w di v ad E è equivalente ad una ed una sola valutazione v_i, per un qualche $i \in I$) è finito (non vuoto) e si ha:

$$\sum_{i\in I} e(v_i, v) f(v_i, v) \leq [E : K] \,.$$

(cfr. [B-85b, Ch. 6, Par. 8, N°3, Thm. 1, pag. 139 e segg.]).

(b) La Proposizone enunciata nel punto (a) può ancora migliorare, nel senso che è possibile caratterizzare i casi in cui vale il segno di uguaglianza nella disuguaglianza $\sum_{i\in I} e_i f_i \leq [E : K]$.

Nella stessa situazione del punto (a), se v è una valutazione discreta non banale di K, se $(A, \mathfrak{m})$ è il suo anello e se B è la chiusura integrale di A in E, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\sum_{i\in I} e(v_i, v) f(v_i, v) = [E : K]$;

(ii) *B è un A-modulo di tipo finito;*

(iii) *B è un A-modulo libero.*

Si noti che se v è non discreta, allora sussiste ancora un'equivalenza del tipo precedente, dove però la condizione (i) è rafforzata con un'ulteriore proprietà (gli indici di ramificazione $e(v_i, v)$ devono essere uguali agli "indici iniziali" $\epsilon(v_i, v)$; per la definizione di indice iniziale e per le dimostrazioni cfr. [B-85b, Ch. 6, Par. 8, Th. 2, pag. 143 e segg.]).

È opportuno ricordare che se v è discreta e se E è un'estensione finita e *separabile* di K, allora la condizione (ii) (e, quindi, (i) ed (iii)) è soddisfatta; ([B-85b, Ch. 5, Par. 1, N°6, Cor. 1, pag. 21]). Infatti:

La chiusura integrale di un dominio noetheriano A integralmente chiuso dentro un'estensione finita e separabile del suo campo dei quozienti è un A-modulo di tipo finito (quindi, in particolare, un dominio noetheriano).

Nel caso in cui si lasci cadere, in tale enunciato, l'ipotesi di separabilità la conclusione non è più assicurata (cfr. [B-85b, Ch. 5, Ex. 20, pag. 70]). È bene ricordare a tale proposito che se A è una k-algebra integra di tipo finito, dove k è un campo fissato, allora la chiusura integrale di A in una qualsiasi estensione finita del suo campo dei quozienti è ancora una k-algebra di tipo finito (ed un A-modulo di tipo finito); (cfr. [B-85b, Ch. 5, Par. 3, N°2, Thm. 2, pag. 59]).

(c) Anticipiamo che, nel caso di campi di funzioni di dimensione 1, dimostreremo un teorema di approssimazione più forte del Teorema 8.5. Questo teorema sarà collegato con il Teorema di Mittag-Leffler della teoria delle funzioni complesse.

    Inoltre, dimostreremo in tale caso particolare la validità dell'uguaglianza nella relazione dell'Osservazione 8.9 (a) (ovvero (b), affermazione (i)).