AL410 (ex-AL3) - Algebra Commutativa - A.A. 2010/2011
Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

TEMA: G(oldman)-domini, G-ideali ed anelli di Hilbert (detti anche anelli di Jacobson, da Krull e Bourbaki).

ESERCIZI. (1) Sia R un anello e sia Q un ideale primario di R, allora dimostrare che $Q[X]$ è un ideale primario di $R[X]$. Se, poi, P :=rad(Q), allora determinare rad$(Q[X])$.

(2) Sia I un ideale in un anello R. Mostrare che $\bigcap_{n\geq 1} I^n = (0)$ implica che, per ogni $a \in I$, $1 + a$ non è un divisore dello zero in R.
[Notare –ma non è richiesta la dimostrazione– che, nel caso di un anello noetheriano, vale anche il viceversa (Teorema dell'intersezione di Krull).]

(3) Sia P un ideale primo contenuto propriamente in un ideale principale xR di un anello R. Dimostrare o confutare il fatto che $P \subseteq \bigcap_{n\geq 1}(xR)^n$.

(4) Mostrare che se (V, M) è un anello di valutazione di un campo K e se $z \in K \setminus V$ allora $z^{-1} \in M$.

(5) Nel sottoanello $A := \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ di $B := \mathbb{Q}[X]$ (formato da tutti i polinomi a coefficienti razionali con termine noto intero) si consideri l'ideale $P := X\mathbb{Q}[X]$.

(5.1) Mostrare che P è un ideale primo di A (e di B) e stabilire se P è finitamente generato oppure non è finitamente generato come ideale di A.

(5.2) Sia $\varphi : B_P \to \mathbb{Q}$ l'omomorfismo canonico suriettivo definito da $\varphi(f/g) := f(0)/g(0)$, al variare comunque di $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ con $X \nmid g$. Preso comunque un anello di valutazione W di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Z}$ mostrare che $\varphi^{-1}(W)$ è un anello di valutazione del campo $\mathbb{Q}(X)$.

(5.3) Sia p un numero primo e sia $W := \mathbb{Z}_{(p)}$. Mostrare che $\varphi^{-1}(W)$ è un anello di valutazione non discreta del campo $\mathbb{Q}(X)$.

SOLUZIONI

Soluzione Esercizio 1. Sia $\mathcal{Z}(A)$ [rispettivamente $\mathrm{Nilp}(A)$] l'insieme dei divisori dello zero [rispettivamente, elementi nilpotenti] di un anello A.

E' noto che un ideale Q di un anello R è primario se e soltanto se $\mathcal{Z}(R/Q) = \mathrm{Nilp}(R/Q)$.

D'altra parte si può dimostrare che un polinomio non nullo $f := a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$ appartiene a $\mathcal{Z}(A[X])$ se e soltanto se esiste un elemento non nullo $\alpha \in A$ in modo tale che $\alpha f = 0$. Pertanto $f \in \mathcal{Z}(A[X])$ se e soltanto se $a_k \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $0 \leq k \leq n$.

Inoltre, un polinomio non nullo $f := a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$ è nilpotente se e soltanto se $a_k \in \mathrm{Nilp}(A)$, per ogni $0 \leq k \leq n$. In altre parole, $\mathrm{Nilp}(A[X]) = (\mathrm{Nilp}(A))[X]$. Da ciò (e dal fatto che, per ogni anello A, $\mathrm{Nilp}(A)$ coincide con $\mathrm{rad}((0))$) si deduce che per ogni ideale I di un anello A, $\mathrm{rad}(I[X]) = (\mathrm{rad}(I))[X]$.

Da quanto precede si ricava che $\mathcal{Z}(R[X]/Q[X]) = \mathcal{Z}((R/Q)[X]) = (\mathcal{Z}(R/Q))[X] = (\mathrm{Nilp}(R/Q))[X] = \mathrm{Nilp}((R/Q)[X]) = \mathrm{Nilp}(R[X]/Q[X])$, cioè $Q[X]$ è primario in $R[X]$ e che $P[X] = (\mathrm{rad}(Q))[X] = \mathrm{rad}(Q[X])$.

Soluzione Esercizio 2. Se $b(1 + a) = 0$ allora $b = -ba$, quindi (moltiplicando per $-a$ ambo i membri) $-ba = ba^2$ $(\in I^2)$. Pertanto, induttivamente, si ha che $b \in I^n$ per ogni $n \geq 1$, cioè, $b = 0$.

Soluzione Esercizio 3. Per ogni $p \in P$, $p = p_1x$ con $p_1 \in R$, anzi $p_1 \in P$, perché $x \notin P$. Iterando, il ragionamento, si ha che $p \in x^nR$, per ogni $n \geq 1$.

Soluzione Esercizio 4. Se $z \in K \setminus V$ e V è un anello di valutazione $z^{-1} \in V$. Siccome $z \notin V$, z^{-1} è un elemento non invertibile di V e quindi $z^{-1} \in M$.

Soluzione Esercizio 5. (1) Si noti che l'isomorfismo canonico $B/P \cong \mathbb{Q}$ si restringe ad un isomorfismo canonico $A/P \cong \mathbb{Z}$. Quindi, P è un ideale primo di A.

Se P fosse finitamente generato in A, allora $P = (a_1/b_1X + X^2f_1, a_2/b_2X + X^2f_2, ..., a_r/b_rX + X^2f_r)$, con $a_k, 0 \neq b_k \in \mathbb{Z}$ e $f_k \in \mathbb{Q}[X]$ $(1 \leq k \leq r)$. Ma ciò conduce ad un assurdo in quanto non ogni elemento di $\mathbb{Q}$ può essere ottenuto come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di $\{a_1/b_1, a_2/b_2, ..., a_r/b_r\}$.

(2) Dal momento che $B_P = \mathbb{Q}[X]_{(X)} = \mathbb{Q} + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$, allora $\varphi^{-1}(W) = W + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$, con

$$A = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \subset W + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \subset B_P = \mathbb{Q}[X]_{(X)}\,.$$

Se $z \in \mathbb{Q}(X) \setminus \mathbb{Q}[X]_{(X)}$ allora $z^{-1} \in PB_P = X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \subset W + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$ (per il punto (4)), essendo (B_P, PB_P) un anello di valutazione).

Se $z \in \mathbb{Q}[X]_{(X)} \setminus \varphi^{-1}(W)$, allora $\varphi(z) \in \mathbb{Q} \setminus W$. Da ciò, dal fatto che W è un anello di valutazione (con campo dei quozienti $\mathbb{Q}$) e dal fatto che $PB_P \subset \varphi^{-1}(W)$, si ricava facilmente che $z^{-1} \in \varphi^{-1}(W)$.

(3) Se $N = p\mathbb{Z}_{(p)}$ è l'ideale massimale di W, allora $N + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$ è l'ideale massimale di $\varphi^{-1}(W) = W + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} = \mathbb{Z}_{(p)} + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$. Quindi in $\varphi^{-1}(W)$ abbiamo una catena di ideale primi distinti del tipo:

$$(0) \subset X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \subset N + X\mathbb{Q}[X]_{(X)}$$

pertanto $\varphi^{-1}(W)$ non può essere un un anello di valutazione discreta (= DVR) (perché un DVR è un PID, quindi ha dimensione 1).