AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2006/2007
Valutazione "in itinere", Gennaio 2007

AVVERTENZE : *Svolgere il tema in classe, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso.*

TEMA: *Anelli noetheriani e teorema della base di Hilbert.*

ESERCIZIO 1. Sia A un anello, E un A-modulo, $x \in E$, $\mathrm{Ann}_A(x) := \{a \in A \mid ax = 0\}$. Sia P un ideale primo di A associato ad E, cioè $P = \mathrm{Ann}_A(z)$, per un qualche elemento non nullo $z \in E$.

(a) Mostrare che un elemento massimale nell'insieme (ordinato tramite l'inclusione insiemistica):

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} := \{\mathrm{Ann}_A(x) \mid 0 \neq x \in E\}$$

è sempre un ideale primo di A.

(b) Sia F un sotto-A-modulo di E e sia P un ideale primo di A associato ad E. Mostrare che P o è associato all'A-modulo F oppure P è associato all'A-modulo E/F.

ESERCIZIO 2. Sia A un anello ed $0 \neq s \in A$, sia $S := \{s^n \mid n \geq 0\}$, sia I l'ideale dell'anello dei polinomi $A[X]$ generato dal polinomio lineare $sX - 1$, cioè $I := (sX - 1)A[X]$, e sia $x := X + I$, dunque $A[x] = A[X]/I$.

(a) Mostrare che l'applicazione $f : A_S \to A[x]$ definita da $f(\frac{a}{s^n}) := ax^n$ è un isomorfismo di anelli.

(b) Utilizzando (a), mostrare che l'anello-quoziente $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ è isomorfo ad un anello di frazioni dell'anello $\mathbb{C}[X]$ e dedurre che $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ è un dominio ad ideali principali.

ESERCIZIO 3. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli, sia P un ideale primo di A e sia $J := f(P)B$ l'ideale di B generato dalle immagini tramite f degli elementi di P.

(a) Mostrare che $T := f(A \setminus P)$ è una parte moltiplicativa di B e che $T \cap J = \emptyset$ se $f^{-1}(J) = P$.

(b) Mostrare con un esempio che, in generale, J non è un ideale primo di B.

(c) Mostrare che esiste un ideale primo Q di B tale che $f^{-1}(Q) = P$ se e soltanto se $f^{-1}(J) = P$.

(d) Dedurre che se $A \subset B$ è un'estensione intera allora per ogni ideale primo P di A si ha che $PB \cap A = P$.

(e) Sia $A := \mathbb{Z}$, $B := \mathbb{Z}_{(p\mathbb{Z})} \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, dove $p = 2$ e $q = 3$, e sia f l'omomorfismo definito da $x \mapsto (\frac{x}{1},\ x + q\mathbb{Z})$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Determinare tutti e soli gli ideali primi P di $\mathbb{Z}$ per i quali esiste un ideale primo Q di $\mathbb{Z}_{(p\mathbb{Z})} \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ tale che $f^{-1}(Q) = P$.