AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2009/2010
Valutazione "in itinere" – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema,* **utilizzando al più 3 facciate** *di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

tema (punteggio max)	15										
esercizio	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	2a	2b	2c	2d
punteggio max	1	2	2	3	3	3	2	1	3	3	3

TEMA: *Lo spettro primo di un anello con la topologia di Zariski: enunciare i principali risultati, dando di alcuni di essi le dimostrazioni.*

ESERCIZIO 1. Sia $A := \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ e sia $P := 2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(a) Mostrare che P è un ideale primo di A.

(b) Determinare tutti gli ideali primi di A e tra questi stabilire quali sono ideali massimali.

(c) Sia $S := A \setminus P$. Determinare tutti gli ideali (non banali) dell'anello delle frazioni $S^{-1}A$.

(d) Sia $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto a/1$, l'omomorfismo canonico. Determinare gli elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e stabilire se in questo caso φ è un omomorfismo iniettivo.

(e) Stabilire se l'omomorfismo naturale

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad a \mapsto (a + 2\mathbb{Z}, a + 5\mathbb{Z}),$$

è suriettivo. Determinare il nucleo di h.

(f) Sia $B := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Mostrare che $Q' := \{([0]_2)\} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $Q'' := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{([0]_5)\}$ sono tutti e soli gli ideali primi di B. Determinare gli ideali primi $h^{-1}(Q')$ e $h^{-1}(Q'')$ di A.

(g) Determinare $h^{-1}(b)$, dove $b := ([1]_2, [2]_5) \in B$.

ESERCIZIO 2. Sia A un anello in cui ogni elemento è idempotente (cioè, per ogni $a \in A$, $a^2 = a$). [Ad esempio, se $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, allora $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, etc., e, dato un qualunque insieme non vuoto X, l'anello di tutte applicazioni da X a $\mathbb{F}_2$, $\mathrm{Appl}(X, \mathbb{F}_2) := \mathbb{F}_2^X$, (dotato delle operazioni di somma e prodotto definite puntualmente per ogni elemento $x \in X$, cioè, $(f + g)(x) := f(x) + g(x), (fg)(x) := f(x)g(x)$ dove $f, g \in \mathrm{Appl}(X, \mathbb{F}_2)$) sono anelli in cui ogni elemento è idempotente.]

(a) Mostrare che A ha caratteristica 2 (cioè, $2a = 0$, per ogni $a \in A$). [Utilizzare il fatto che $a + a = (a + a)^2$.]

(b) Mostrare che, presi comunque $a, b \in A$, allora $ab(a + b) = 0$.

(c) Sia P un ideale primo di A. Utilizzando **(b)**, mostrare che se $a, b \in A$ sono tali che $a \notin P$ e $b \notin P$, allora $a + b \in P$ (ovvero, $a + P = b + P$).

(d) Sia P un ideale primo di A. Mostare che esiste un isomorfismo canonico tra A/P ed il campo $\mathbb{F}_2$ (quindi, in particolare, in A ogni ideale primo è massimale).