AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2007/2008

Valutazione "in itinere" – Prima Prova

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

tema (punteggio max)	20			
esercizio	a	b	c	d
punteggio max	2	6	8	10

TEMA: Anelli di frazioni e localizzazioni: enunciare i principali risultati, dando di alcuni di essi le dimostrazioni.

ESERCIZIO. Siano A e B due anelli e siano $\pi_A : A \times B \to A$ e $\pi_B : A \times B \to B$ le proiezioni naturali.

(a) Se I è un ideale di A e J è un ideale di B allora $I \times J := \{(i, j) \mid i \in I,\ j \in J\}$ è un ideale di $A \times B$.

(b) Sia H un ideale di $A \times B$ e si ponga $H' := \pi_A(H)$ e $H'' := \pi_B(H)$. Mostrare che:

- H' è un ideale di A,
- H'' è un ideale di B e che
- $H = H' \times H'' = \pi_A^{-1}(H') \cap \pi_B^{-1}(H'')$.

(c) Utilizzando la tecnica del punto **(b)**, descrivere

- $\mathrm{Spec}(A \times B)$ in funzione di $\mathrm{Spec}(A)$ e $\mathrm{Spec}(B)$,
- $\mathrm{Max}(A \times B)$ in funzione di $\mathrm{Max}(A)$ e $\mathrm{Max}(B)$.

(d) Sia $A := \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ e sia $B := S^{-1}\mathbb{Z}$ dove S è la parte moltiplicativa saturata di $\mathbb{Z}$ complementare dell'unione degli ideali primi $2\mathbb{Z}$ e $11\mathbb{Z}$ (cioè, $S := \mathbb{Z} \setminus \{2\mathbb{Z} \cup 11\mathbb{Z}\}$). Descrivere esplicitamente

- i punti chiusi di $\mathrm{Spec}(A \times B)$ (dotato della topologia di O. Zariski),
- i sottospazi chiusi irriducibili di $\mathrm{Spec}(A \times B)$ (dotato della topologia di O. Zariski).