AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2007/2008

Appello B

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più* **3** *facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

Svolgere almeno un esercizio in modo esaustivo, utilizzando al più **3** *facciate di un foglio protocollo.*

TEMA: il Teorema degli zeri di Hilbert e sue varie formulazioni.

ESERCIZIO 1. Sia D un dominio con campo dei quozienti K e sia X un'indeterminata su K (e su D).

(1) Sia $S := D \setminus \{0\}$. Dimostrare che $K[X] = S^{-1}(D[X])$.

(2) Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca che conserva l'inclusione tra gli ideali primi P di $D[X]$ tali che $P \cap D = (0)$ e (tutti) gli ideali primi di $K[X]$.

(3) Sia $Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq Q_3$ una catena di ideali primi di $D[X]$. Dimostrare che $Q_1 \cap D \neq Q_3 \cap D$.

(4) Determinare tutti gli ideali primi Q di $\mathbb{Z}[X]$ tali che $Q \cap \mathbb{Z} = (0)$.

(5) Sia $P := (p)$ un ideale primo (massimale) di $\mathbb{Z}$ generato da un numero primo p. Descrivere tutti gli ideali primi M di $\mathbb{Z}[X]$ tali che $M \cap \mathbb{Z} = P$.

(6) Definire la dimensione di Krull di un anello e dimostrare in modo elementare (senza ricorrere a risultati generali) che $\dim(\mathbb{Z}[X]) \leq 3$.
(Si può dimostrare precisamente che $\dim(\mathbb{Z}[X]) = 2$ e, più in generale, che se A è un anello noetheriano con $\dim(A) = d$ allora $\dim(A[X]) = d + 1$.)

ESERCIZIO 2. Sia A un anello ed X una indeterminata su A.

(1) Sia I un ideale di A, dimostrare che

$$\frac{A[X]}{I[X]} \cong \left(\frac{A}{I}\right)[X] .$$

(2) Sia I un ideale di A, dimostrare che

$$I \text{ è un ideale primo di } A \Leftrightarrow I[X] \text{ è un ideale primo di } A[X] .$$

(3) Sia M un ideale massimale di A. Stabilire se $M[X]$ è un ideale massimale in $A[X]$.

(4) Sia $f := a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$. Dimostrare che f è nilpotente in $A[X]$ se e soltanto se a_k è nilpotente in A per ogni k, $0 \leq k \leq n$.

(5) Sia $A := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Poniamo $\bar{a} := a + 12\mathbb{Z} \in A$, per ogni $a \in \mathbb{Z}$. Stabilire se il polinomio $\bar{4} + \bar{6}X + \bar{3}X^2$ è nilpotente in $A[X]$.