Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 9 - Andrea Cova (1 dicembre 2004)

1. Sia G un gruppo. Mostrare che:
(a) Se G è abeliano, allora $(ab)^n = a^n b^n$ presi comunque $a, b \in G$ ed $n \geq 1$;
(b) Se $(ab)^2 = a^2 b^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano;
(c) Se ogni elemento di G (diverso dall'elemento neutro) ha ordine 2, allora G è abeliano;
(c) Se G è finito (non banale) di ordine pari, allora G ha un elemento di ordine 2.

2. Sia S un insieme e $(G, \bullet)$ un gruppo. Nell'insieme $X = G^S$ di tutte le funzioni di dominio S e codominio G si definisca l'operazione: $X \times X \to X$,
$(f, g) \mapsto f * g$, dove $f * g : S \to G$ è definita da $(f * g)(s) = f(s) \bullet g(s)$. Mostrare che, rispetto a questa operazione, $X = G^S$ è un gruppo.

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sia $t_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $t_{a,b}(x) = ax + b$.
(a) Verificare che l'insieme $T := \{ t_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \}$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.
(d) Mostrare che T non è commutativo.

4. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Determinare quali tra le seguenti proposizioni sono vere:
(a) Se H è un sottogruppo di G, allora $H \bullet H = H$.
(b) Se X è un sottoinsieme non vuoto di G e $X \bullet X = X$, allora X è un sottogruppo di G.
Se X è un sottoinsieme finito (non vuoto) di G e $X \bullet X = X$, allora X è un sottogruppo di G.

5. Provare che l'insieme delle matrici del tipo
$z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, è un gruppo rispetto alla somma di matrici.

6. Stabilire se l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto così definito: $(a, b)(c, d) =(ac, bc + d)$.

7. Sia U il sottogruppo di $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ formato da tutti i numeri complessi di modulo uguale ad 1.
(a) Verificare che l'applicazione $\varphi : (\mathbb{R},+) \to (U,\cdot)$ definita da $r \mapsto \cos(2\pi r) + i \operatorname{sen}(2\pi r)$ è un omomorfismo.
(b) Usando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, dimostrare che $U \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

8. Sia G l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbb{Z}_8$ della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } ad = 1.$$

(a) Mostrare che G è un gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne;
(b) Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : G \to U(\mathbb{Z}_8) \text{ definita da } A \mapsto a$$

è un omomorfismo di gruppi:
(c) Determinare $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ e definire l'isomorfismo canonico

$$G / Ker(\varphi) \cong Im(\varphi);$$

(d) Determinare $\varphi^{-1}(5)$.