Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005

ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 5- Andrea Cova (27 ottobre 2004)

1. Presi comunque a e b, ad esempio $a, b \in \mathbb{R}$, mostrare che, per ogni $n \geq 0$:
   (a) $a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+nb) = (n+1)(2a+nb)/2$;
   (b) se $b \neq 1$,
   $a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots + ab^n = a(b^{n+1}-1) / (b-1)$.

2. Determinare quali tra le proprietà riflessiva (**R**), simmetrica (**S**), transitiva (**T**), antisimmetrica (**AS**) totale (**TT**) sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:
   (a) Nell'insieme delle rette del piano affine reale:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è parallela (ma *non* coincidente con) x';
   (b) Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è perpendicolare a x';
   (c) Fissato $S \neq \emptyset$, nell'insieme $X := P(S)$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è disgiunto da x';
   (d) Nell'insieme $X := P(S)$, come in (c):
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è un sottoinsieme di x';
   (e) Nell'insieme $X := \mathbb{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ $x - x'$ è un multiplo di 5;
   (f) Nell'insieme $X := \mathbb{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow x \geq x'$;
   (g) Nell'insieme $X := \mathbb{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è un multiplo di x';
   (h) Nell'insieme $X := \mathbb{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow xx' = z^2$, per qualche $z \in \mathbb{N}$;
   (i) Nell'insieme $X := \mathbb{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow |x| = |x'|$;
   (j) Nell'insieme $X := \mathbb{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow xx' > 0$;
   (k) Nell'insieme $X := \mathbb{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x ed x' hanno lo stesso numero di cifre (nella usuale scrittura decimale).

3. Mostrare che le seguenti relazioni sono relazioni di equivalenza e descrivere esplicitamente l'insieme-quoziente:
   (a) in $\mathbb{Z}$, la relazione: $x \rho x' :\Leftrightarrow |x| = |x'|$;
   (b) in $\mathbb{Z}$, la relazione: x "ha la stessa parità di" x' (cioè: x è in relazione con x' se x ed x' sono entrambi pari oppure entrambi dispari);
   (c) in $\mathbb{R}$, la relazione: x "differisce per un multiplo intero di 2π da" x' (cioè, $x = x' + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$);
   (d) in $\mathbb{R}$, la relazione x "ha la stessa parte intera di" x' (cioè: $[x] = [x']$);
   (e) in $\mathbb{R}$, la relazione: x "differisce per un intero da" x' (cioè: $x = x' + k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$);
   (f) sia X il piano [o lo spazio] affine reale ed x_0 un punto di X; nell'insieme $X \setminus \{x_0\}$ la relazione: x "è allineato con x_0 e con" x';
   (g) in $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ la relazione: $(x, y) \rho (x', y') :\Leftrightarrow x'^2 y = x^2 y'$;
   (h) in $\mathbb{C}$, la relazione: $z \rho z' :\Leftrightarrow z' = z + (a + i b)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$;
   (i) fissato un insieme S finito non vuoto, in $X := P(S)$ la relazione: x "ha lo stesso numero di elementi di" x';
   (j) in $\mathbb{C}$, la relazione $z \rho z' :\Leftrightarrow z - z' = \overline{z' - z}$;
   (k) in $\mathbb{C}$, la relazione $z \rho z' :\Leftrightarrow z - z' = z - z'$.