

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
AL 1
Esercizi per casa, I prova

Consegnare entro lunedì 18 ottobre.

1. Sia S un insieme e siano A e B due sottoinsiemi di S .

- (a) Dimostrare che $(A^* \cup B) \cap (A \cup B^*) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^*$ (dove, se C è un sottoinsieme di S , C^* denota il complementare di C in S).
- (b) Sia $A \Delta B$ la differenza simmetrica di A e B (cioè $A \Delta B := (A \cap B^*) \cup (A^* \cap B)$). Dimostrare che

$$\text{Card}(A \Delta B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2 \text{Card}(A \cap B).$$

2. Si consideri l'insieme $A := \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- (1) $\emptyset \in A$
- (2) $\emptyset \subseteq A$
- (3) $\{\emptyset\} \in A$
- (4) $\{\emptyset\} \subseteq A$
- (5) $\{\{\emptyset\}\} \in A$
- (6) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$
- (7) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \in A$
- (8) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \subseteq A$
- (9) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- (10) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$
- (11) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(A)$
- (12) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

3. Sia S un insieme e siano A, B e C sottoinsiemi di S . Verificare quali delle seguenti proprietà sono vere (dimostrare quelle vere e trovare un controesempio per quelle false):

(a) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C^*)^*$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cap (B \cup C)$

(c) $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.

4. Dimostrare che se a e b sono numeri interi tali che $\text{MCD}(a, b) = 1$ allora $\text{MCD}(ab, a + b) = 1$.

5. Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che nell'insieme

$$X := \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$$

nessun intero divide uno degli altri.

6. Determinare il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo delle seguenti coppie di interi e scriverne il massimo comun divisore sotto forma di una identità di Bezout.

(a) $(170, 700)$

(b) $(1117, 1977)$

(c) $(701, 2004)$