

Corso di Analisi Numerica - AN2

Parte 3: metodi alle differenze
per Equazioni Differenziali Ordinarie

Roberto Ferretti



*Dipartimento di Matematica
Universita' di Roma Tre*

- Qualche richiamo analitico
- Filosofia generale dei metodi alle differenze: i metodi di Eulero
- Analisi dei metodi ad un passo
- Metodi ad un passo espliciti ed impliciti
- Metodi multistep e relativa analisi
- Metodi multistep espliciti ed impliciti

Qualche richiamo analitico

Un problema di grande rilevanza applicativa è il cosiddetto **problema di Cauchy per sistemi di Equazioni Differenziali Ordinarie**:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

- A tale problema analitico sono riconducibili molte leggi fisiche (ad esempio, le leggi della **meccanica** classica e della **teoria dei circuiti**), come anche **modelli macroscopici di sistemi complessi**.
- In questa sede non lavoreremo sulle ipotesi minimali, ma utilizzeremo quelle che garantiscono **l'esistenza e la regolarità globale**

Una formulazione alternativa del problema di Cauchy (1) è fornita dalla cosiddetta **equazione integrale di Volterra**:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (2)$$

- L'equazione di Volterra rappresenta una **formulazione debole** del problema di Cauchy: **una soluzione di (1) è sempre soluzione di (2), una soluzione di (2) non necessariamente soddisfa (1) punto per punto**
- L'esistenza globale richiede le ipotesi di Caratheodory: **$f(x, y)$ misurabile rispetto al primo argomento, globalmente lipschitziana rispetto al secondo**

- Se supponiamo che $f(x, y)$ soddisfi per ogni x la condizione di Lipschitz

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L_f \|y_1 - y_2\|,$$

allora esiste una unica soluzione del problema di Cauchy (1) definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è soddisfatta la maggiorazione

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq e^{L_f(x-x_0)} \|y_1(0) - y_2(0)\|$$

per ogni coppia di soluzioni $y_1(x), y_2(x)$ (lemma di Gronwall).

- Se si suppone in più che $f(\cdot, y)$ sia anche continua, allora $y \in C^1(\mathbb{R})$

indice

Filosofia generale dei metodi alle differenze: i metodi di Eulero

Nei **metodi alle differenze** l'equazione differenziale viene approssimata essenzialmente **rimpiazzando la derivata $y'(x)$ con un rapporto incrementale** calcolato tra nodi di una **griglia di passo h** :

$$x_k = x_0 + kh$$

- In corrispondenza di x_k , **la soluzione numerica assume il valore u_k** che intende approssimare il valore **$y(x_k)$** della soluzione
- Qualora interessi, il valore della soluzione **tra un nodo e l'altro** si può ricostruire ad esempio per **interpolazione**

Il modo più semplice di approssimare la derivata $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$ è tramite il rapporto incrementale tra i due nodi x_k e x_{k+1} :

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}$$

- Tale approssimazione equivale a calcolare $y(x_{k+1})$ da $y(x_k)$ tramite uno sviluppo di Taylor di primo ordine centrato in x_k :

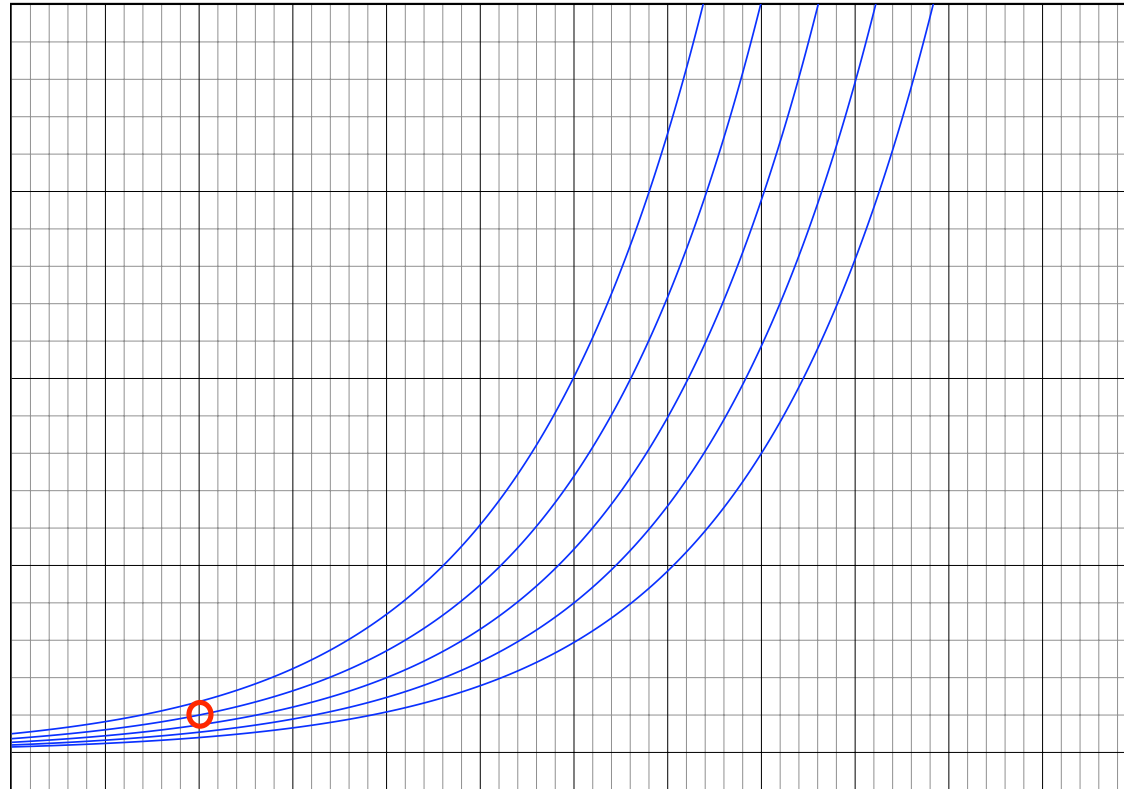
$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hy'(x_k) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$$

- Ponendo $u_0 = y_0$, possiamo pensare di definire una soluzione numerica sulla base di questa relazione di ricorrenza

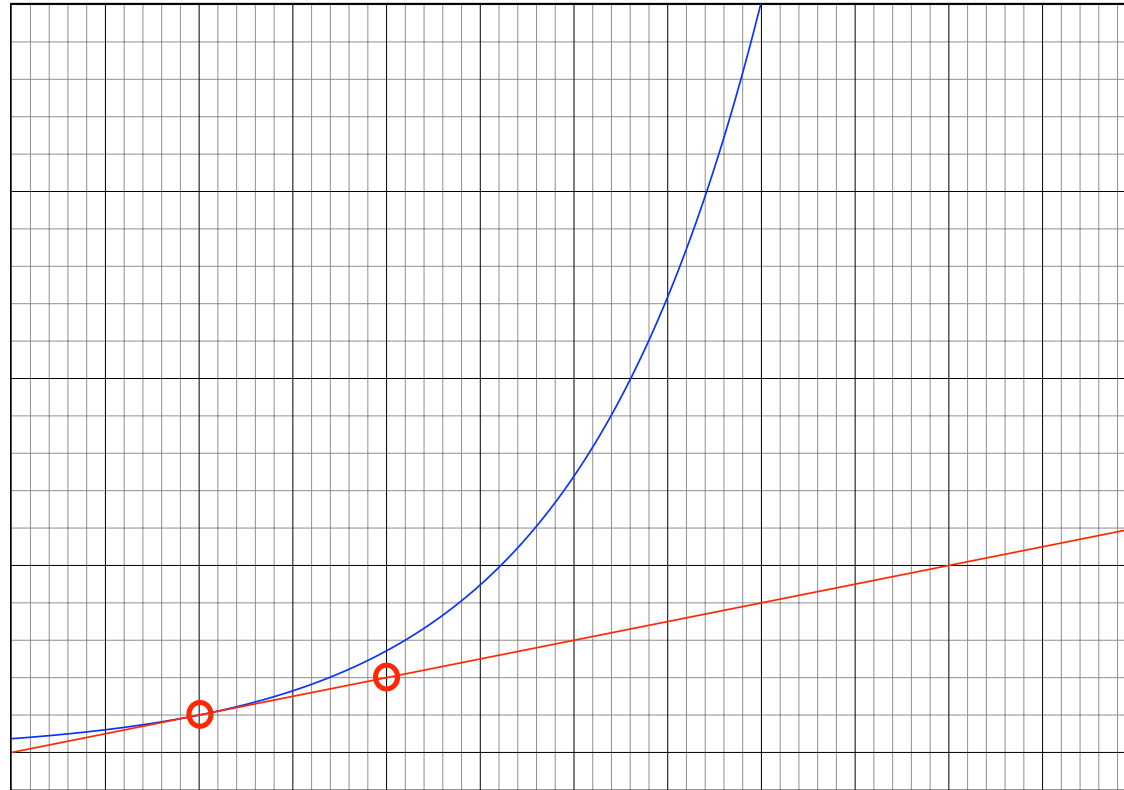
Metodo di Eulero esplicito, o di *Eulero in avanti*:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

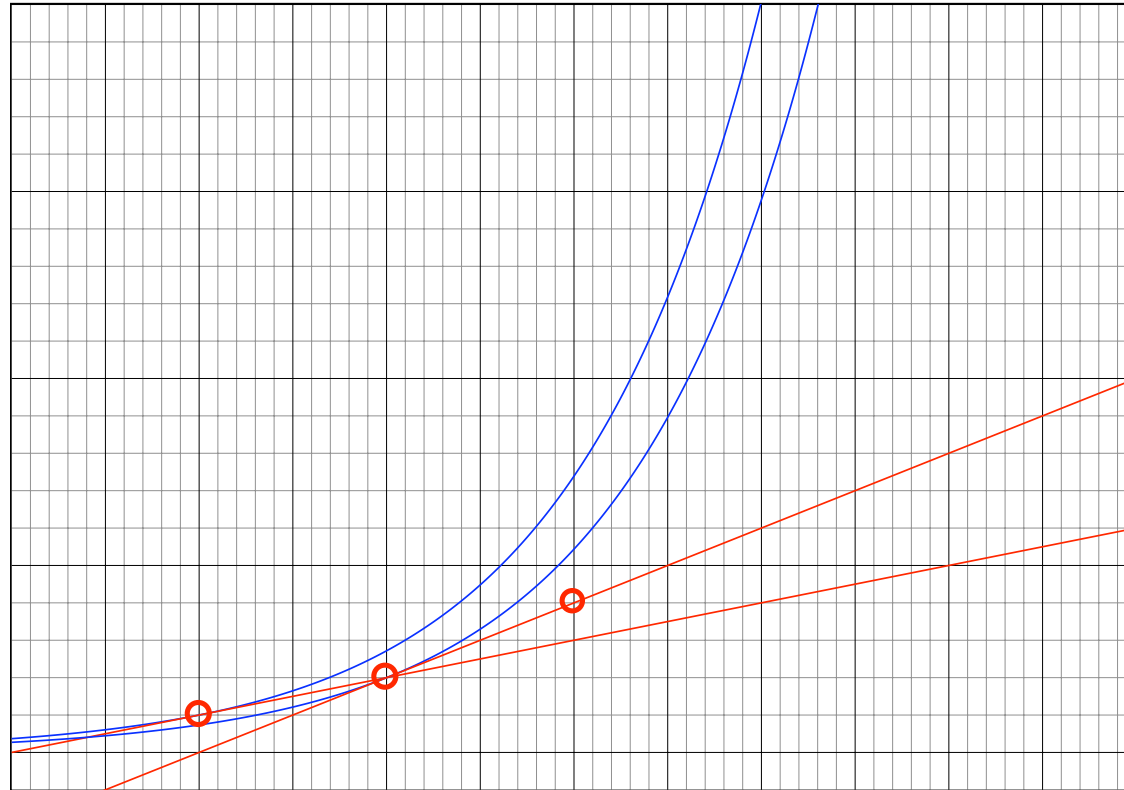
- Utilizzando questa **formula di ricorrenza** è possibile calcolare la approssimazione u_k per k crescenti: u_{k+1} è definito in modo *esplicito* a partire dalle grandezze calcolate al passo k -mo
- Il primo passo di questo metodo calcola lo **sviluppo di Taylor di primo ordine di $y(x_1)$** , mentre ai passi successivi non c'è più in generale coincidenza con la soluzione



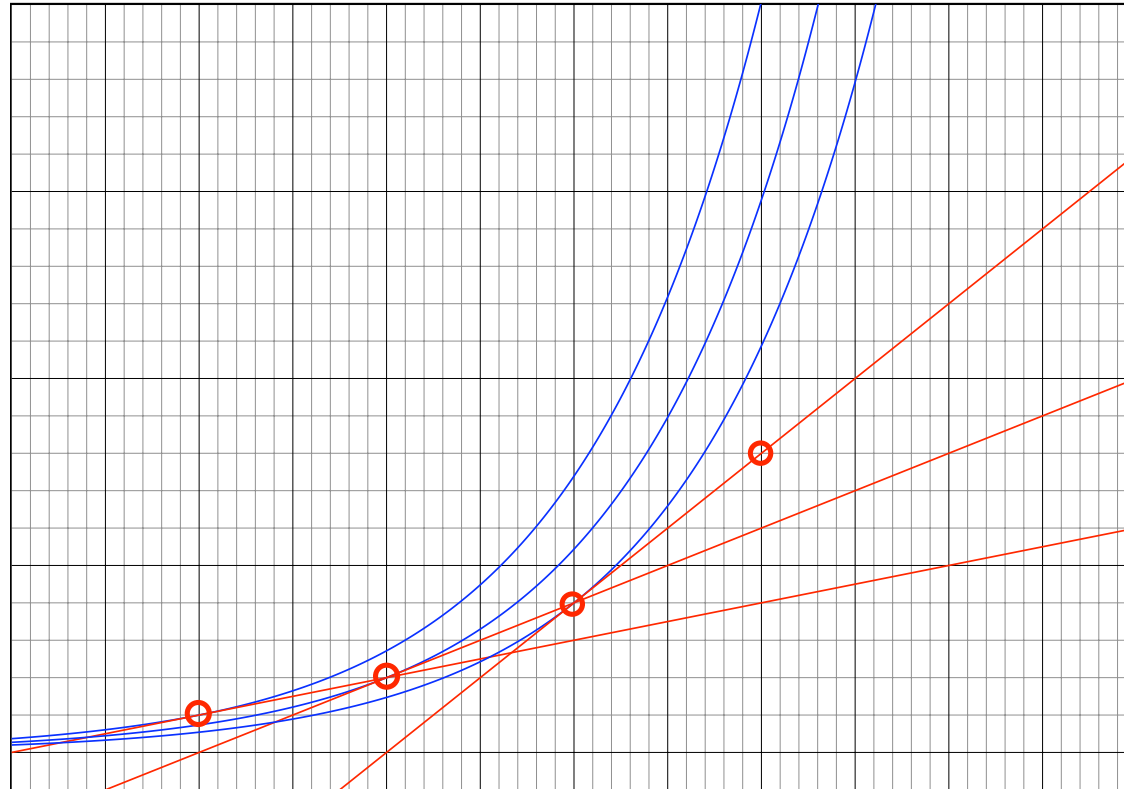
La $f(x, y)$ definisce un campo di curve integrali



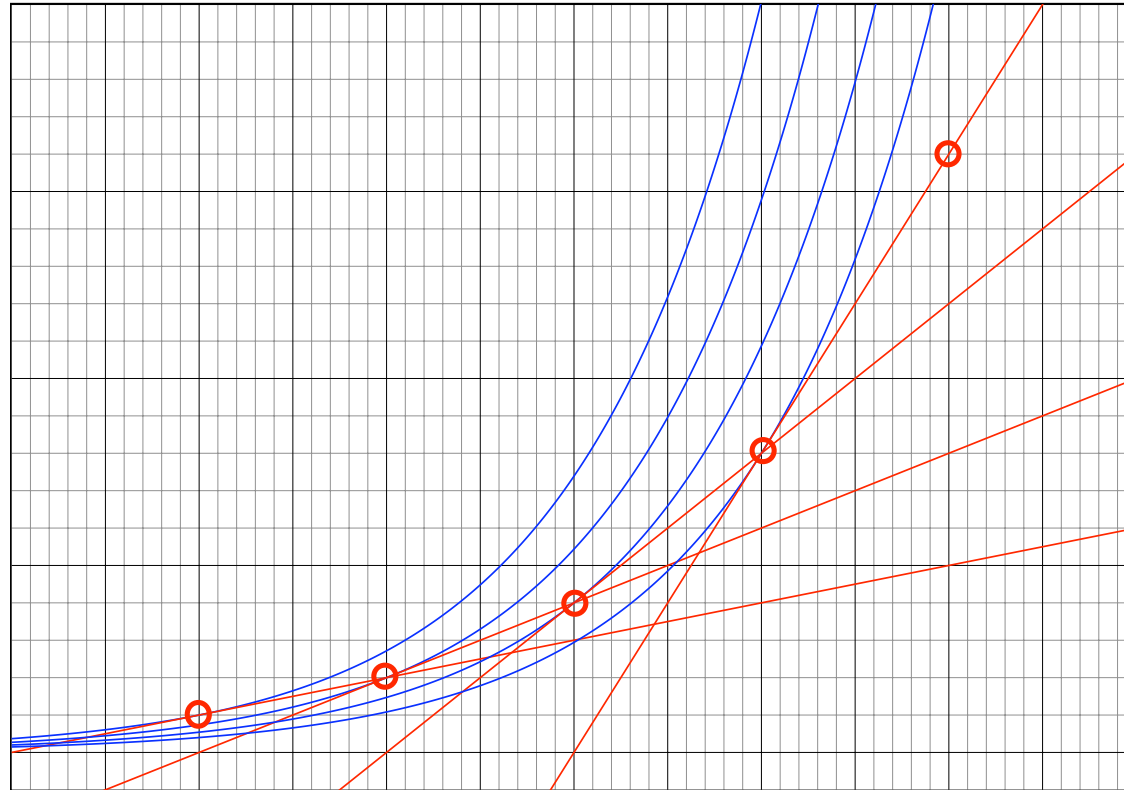
Al primo passo, il metodo si sposta lungo la **tangente alla soluzione**



Ai passi successivi, lungo la **tangente ad altre curve integrali**



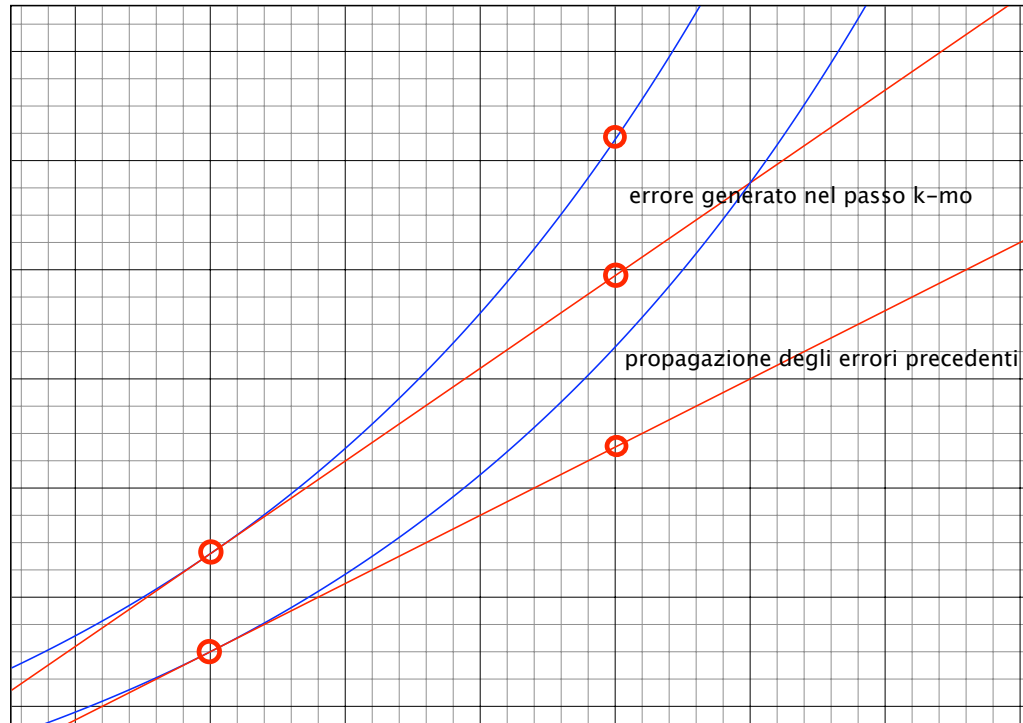
Ai passi successivi, lungo la **tangente ad altre curve integrali**



Ai passi successivi, lungo la **tangente ad altre curve integrali**

Nel **metodo di Eulero** gli errori provengono da due meccanismi diversi:

- Si utilizza lo **sviluppo di Taylor** per muoversi lungo una curva integrale, introducendo un primo **errore di approssimazione locale** della soluzione
- Lo spostamento viene effettuato tramite **sviluppo di Taylor** di una curva integrale (vicina ma) **diversa dalla soluzione**, la cui distanza dalla soluzione è legata alla **propagazione degli errori locali ai passi precedenti**



I meccanismi di **generazione** e **propagazione** dell'errore
nel metodo di Eulero

- Il primo meccanismo è legato al cosiddetto **errore locale di troncamento** $\tau(x, y; h)$, che sarà definito rigorosamente più avanti.
- Per valutare la precisione con cui vengono seguite le curve integrali tra un nodo e l'altro, **si utilizzano** $y(x)$, $y(x + h)$ al posto di u_k , u_{k+1} **nello schema**, confrontando il risultato con lo **sviluppo** di $y(x + h)$:

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2)$$

- Il primo meccanismo è legato al cosiddetto **errore locale di troncamento** $\tau(x, y; h)$, che sarà definito rigorosamente più avanti.
- Per valutare la precisione con cui vengono seguite le curve integrali tra un nodo e l'altro, **si utilizzano** $y(x)$, $y(x + h)$ al posto di u_k , u_{k+1} **nello schema**, confrontando il risultato con lo **sviluppo** di $y(x + h)$:

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2)$$

- I primi due termini coincidono con **il valore che assegnerebbe lo schema** a $y(x + h)$, il termine di resto dà conto dell'**accuratezza locale**

- Il secondo meccanismo è legato alla **stabilità** dello schema.
- Per valutare la **propagazione degli errori accumulati nei passi precedenti**, si può supporre di confrontare un passo dello schema, effettuato a partire da due punti diversi, (x_k, u_k) e (x_k, v_k) :

$$\begin{aligned}
 \|u_k + hf(x_k, u_k) - [v_k + hf(x_k, v_k)]\| &\leq \\
 &\leq \|u_k - v_k\| + h\|f(x_k, u_k) - f(x_k, v_k)\| \leq \\
 &\leq (1 + hL_f)\|u_k - v_k\|
 \end{aligned}$$

- L'errore viene quindi **leggermente amplificato**, ma con un ordine che consente di controllarne la propagazione passando al limite per $h \rightarrow 0$

La derivata $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$ si può però approssimare anche con il rapporto incrementale (a sinistra) tra i due nodi x_{j-1} e x_j :

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}$$

• Posto $j = k + 1$, tale approssimazione lega $y(x_{k+1})$ e $y(x_k)$ tramite uno sviluppo di Taylor di primo ordine centrato in x_{k+1} :

$$y(x_k) \approx y(x_{k+1}) - hy'(x_{k+1}) = y(x_{k+1}) - hf(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

ed esprimendo $y(x_{k+1})$ in funzione di $y(x_k)$, si ha

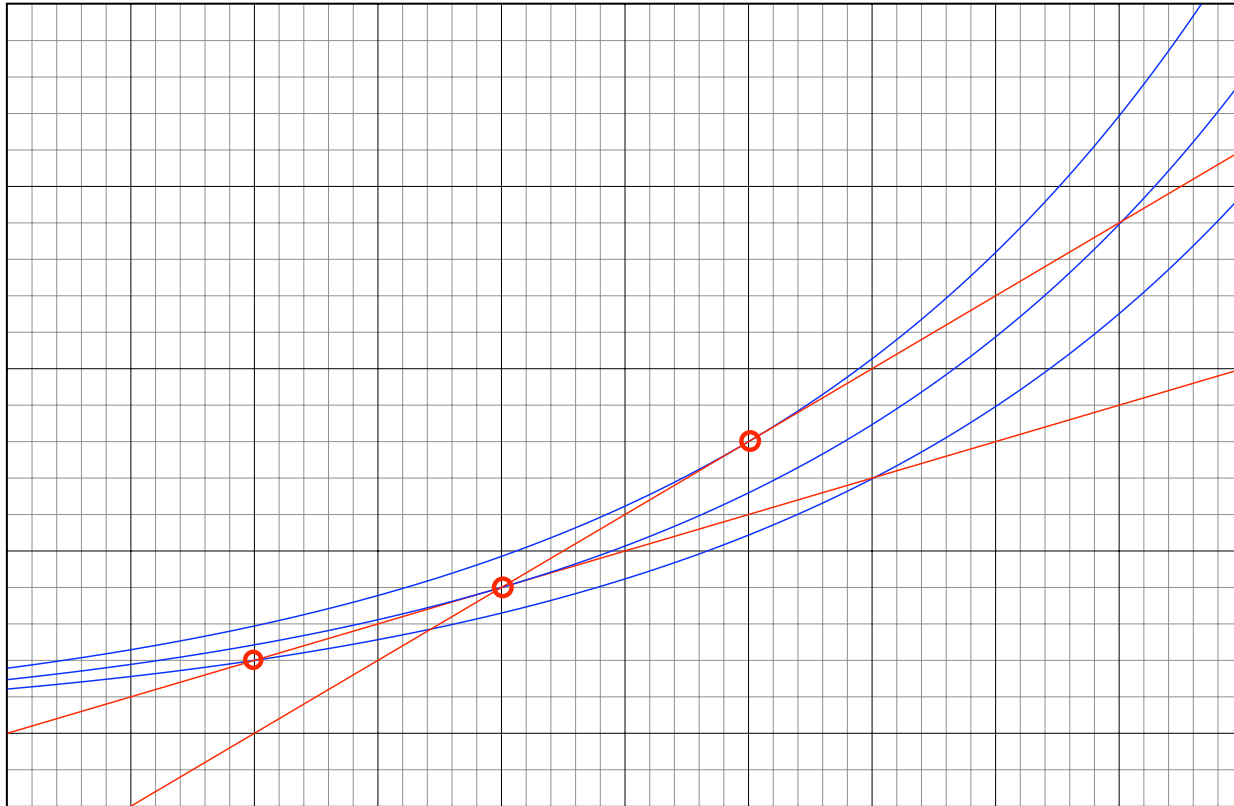
$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

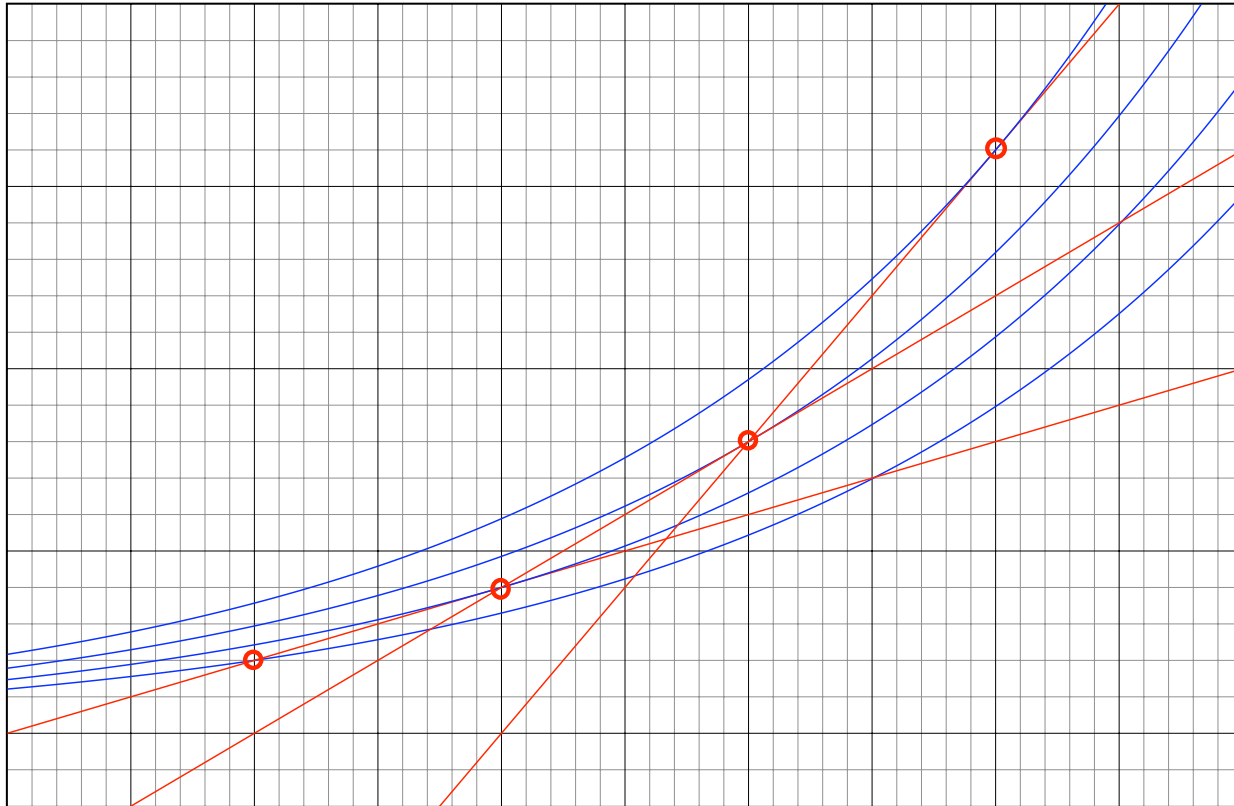
Metodo di Eulero implicito, o di *Eulero all'indietro*:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

- Utilizzando questa formula di ricorrenza per k crescenti: u_{k+1} è definito in modo *implicito (come soluzione di una equazione)* a partire dalle grandezze calcolate al passo k -mo
- Questa procedura equivale a cercare ad ogni passo la curva integrale la cui tangente in x_{k+1} passa per (x_k, u_k)







Per confrontare il comportamento dei due schemi di Eulero, consideriamo il problema scalare, lineare

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- La soluzione esatta in un certo punto \bar{x} fissato vale $y(\bar{x}) = y_0 e^{\lambda \bar{x}}$
- Se $\lambda < 0$ e si manda $x \rightarrow \infty$, si ha $y(x) \rightarrow 0$

Confrontiamo i due metodi di Eulero in termini di convergenza alla soluzione esatta, e di conservazione della proprietà qualitativa di stabilità delle soluzioni

- Per il metodo di **Eulero esplicito**, si ha $u_k = u_{k-1} + h\lambda u_{k-1}$ e quindi:

$$u_k = (1 + h\lambda)u_{k-1} = \cdots = (1 + h\lambda)^k y_0$$

- Per il metodo di **Eulero implicito**, si ha invece $u_k = u_{k-1} + h\lambda u_k$ e:

$$u_k = \frac{1}{1 - h\lambda} u_{k-1} = \cdots = \frac{1}{(1 - h\lambda)^k} y_0$$

- Ponendo $h = \bar{x}/k$ (con \bar{x} fissato), e mandando $k \rightarrow \infty$, in entrambi i casi si ha **convergenza al valore esatto**:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda \bar{x}}{k}\right)^k y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda \bar{x}}{k}\right)^k} y_0 = e^{\lambda \bar{x}} y_0$$

- Perché le soluzioni numeriche convergano a zero per $k \rightarrow \infty$ (con $\lambda < 0$ ed h fissato), è necessario:

- Per il metodo di Eulero esplicito, che $|1 + h\lambda| < 1$, cioè:

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

- Per il metodo di Eulero implicito, che $\left| \frac{1}{1-h\lambda} \right| < 1$, e questa relazione è sempre soddisfatta.

- Quindi, il metodo di Eulero implicito conserva anche nel discreto la stabilità asintotica delle soluzioni, mentre per il metodo esplicito questo accade solo se h è abbastanza piccolo rispetto a λ

La proprietà di conservare nel discreto la stabilità asintotica si dice *stabilità assoluta* e la sua importanza viene da due ordini di motivi:

- Da un lato, nei sistemi in cui alcune componenti della soluzione convergono (molto) più velocemente delle altre, si cerca di evitare di essere costretti a dimensionare il passo su questi autovalori
- Dall'altro, gli autovalori del sistema differenziale possono dipendere da un secondo parametro di discretizzazione (situazione tipica nella discretizzazione di Equazioni a Derivate Parziali)

[indice](#)

Analisi dei metodi ad un passo

La più semplice maniera di generalizzare i metodi di Eulero è tramite i **metodi ad un passo**, che sono nella forma

$$u_{k+1} = u_k + h\Phi(x_k, u_k, u_{k+1}; h) \quad (5)$$

- Il nome “**metodi ad un passo**” si riferisce al fatto che tutte le grandezze sono calcolate nel punto x_k , ovvero che **si avanza utilizzando solo le informazioni dell'ultimo passo** (senza memoria)
- Se la funzione Φ non dipende da u_{k+1} lo schema si dice “**esplicito**”, altrimenti si dice “**implicito**”

La *convergenza per $h \rightarrow 0$* degli schemi alle differenze verso la soluzione esatta si studia *prefissando un intervallo $[x_0, x_0 + M]$* dell'asse x e *confrontando i valori u_k* forniti dallo schema ((5) o altri) *con quelli $y(x_k)$* della soluzione esatta su questo intervallo.

- Definiamo *convergente* uno schema per il quale:

$$\|y(x_k) - u_k\| \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow 0$, con k tale che $x_k \in [x_0, x_0 + M]$ (ovvero $k \in [0, M/h]$).

- La convergenza viene dimostrata a partire da due proprietà più elementari, *la consistenza e la stabilità*

L'*errore locale di troncamento* o *errore di consistenza* $\tau(x, y; h)$ è definito come la differenza tra il rapporto incrementale effettivo della soluzione e quello che si calcola tramite la (5):

$$\tau(x, y; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), y(x+h); h). \quad (6)$$

Si utilizzano cioè $y(x)$, $y(x+h)$ al posto di u_k , u_{k+1} nello schema:

$$y(x+h) = y(x) + h\Phi(x, y(x), y(x+h); h) + h\tau(x, y; h)$$

In generale, la soluzione $y(x)$ non soddisfa la relazione di ricorrenza dello schema, e l'*errore di troncamento* è $1/h$ volte lo scarto.

- Definiamo *consistente* uno schema per il quale $\tau(x, y; h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ (consistente con ordine p se $\tau(x, y; h) = O(h^p)$)

Per controllare la propagazione degli errori negli schemi ad un passo, si fa l'ipotesi di **lipschitzianità sulla funzione Φ** :

$$\left\| \Phi(x, y_1, w_1; h) - \Phi(x, y_2, w_2; h) \right\| \leq L_{\Phi} \left[\|y_1 - y_2\| + \|w_1 - w_2\| \right] \quad (7)$$

- Si può dimostrare che in uno **schema ad un passo esplicito e consistente** questa ipotesi è sempre soddisfatta
- Analogamente al metodo di Eulero, vale la disuguaglianza:

$$\|u_{k+1} - v_{k+1}\| \leq (1 + O(h)) \|u_k - v_k\|$$

che rappresenta un caso particolare della proprietà di **zero-stabilità**

Consideriamo due soluzioni numeriche u_k e v_k , ottenute tramite (5) (o un altro schema) a partire da due diversi dati iniziali u_0 e v_0 .

- Definiamo *zero-stabile* uno schema per il quale esiste una costante C indipendente da h tale che

$$\|u_k - v_k\| \leq C \|u_0 - v_0\|$$

per ogni $h < h_0$, e per $k \in [0, M/h]$ (ciò si può anche interpretare come una versione discreta del lemma di Gronwall)

- Questa proprietà non è legata alla soluzione esatta del problema di Cauchy, ma piuttosto alla sensibilità dello schema alle perturbazioni

La proprietà di Lipschitzianità (7) **implica la zero-stabilità**: infatti

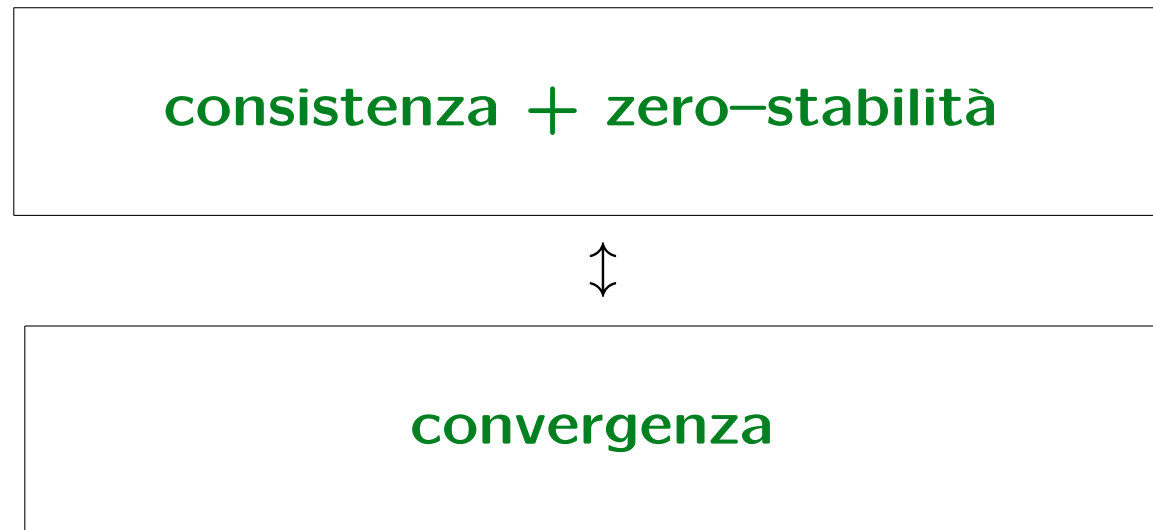
$$\begin{aligned}\|u_k - v_k\| &\leq \|u_{k-1} - v_{k-1}\| + h\|\Phi(u_{k-1}, u_k) - \Phi(v_{k-1}, v_k)\| \leq \\ &\leq (1 + hL_\Phi)\|u_{k-1} - v_{k-1}\| + hL_\Phi\|u_k - v_k\|\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}\|u_k - v_k\| &\leq \frac{1 + hL_\Phi}{1 - hL_\Phi}\|u_{k-1} - v_{k-1}\| \leq \\ &\leq (1 + Ch)\|u_{k-1} - v_{k-1}\| \leq \dots \leq \\ &\leq (1 + Ch)^{M/h}\|u_0 - v_0\| \leq e^{CM}\|u_0 - v_0\|\end{aligned}$$

Per altre classi di schemi, la stabilità **va intesa nel senso più generale**

- Il punto di arrivo della analisi degli schemi alle differenze è che **uno schema è convergente se e solo se è consistente e zero-stabile**



(a seconda che si tratti di **schemi ad uno o a più passi**, questi concetti vanno definiti in **modo appropriato** al caso specifico)

Infine, per tenere conto anche di eventuali soluzioni **asintoticamente stabili ma oscillanti**, la **stabilità assoluta** si analizza in generale sempre sulla base del **problema modello**

$$y' = \lambda y$$

ma **supponendo** $\lambda \in \mathbb{C}$. Si arriva in generale alla relazione di ricorrenza

$$u_{k+1} = g(h\lambda)u_k$$

(con $g(z)$ **polinomio** per gli schemi espliciti, **funzione razionale** per quelli impliciti) e la condizione $|g(z)| < 1$ caratterizza la **regione di stabilità assoluta** (in questo caso, nel piano complesso)

- La regione di stabilità assoluta si valuta quindi nella variabile $z = h\lambda$: per studiare il comportamento dello schema in corrispondenza ad un certo autovalore λ bisogna considerare che il punto del piano complesso associato a questo autovalore viene "risucchiato" verso l'origine per $h \rightarrow 0$
- Definiamo *A-stabile* uno schema la cui regione di stabilità assoluta include tutto il semipiano a parte reale negativa (in questo caso, lo schema produce soluzioni discrete asintoticamente stabili per ogni autovalore λ tale che $\text{Re}(\lambda) < 0$)

Metodi ad un passo espliciti ed impliciti

Vediamo ora le più frequenti scelte di **metodi ad un passo**, nella forma

$$u_{k+1} = u_k + h\Phi(x_k, u_k, u_{k+1}; h)$$

- Tutti i metodi ad un passo che considereremo sono **consistenti**, nel senso della (6), con $\tau(x, y; h) \rightarrow 0$ (qui ha una certa importanza caratterizzare **l'ordine di consistenza** p tale che $\tau(x, y; h) = O(h^p)$)
- Tutti i metodi ad un passo che considereremo sono anche **zero-stabili**, nel senso della dipendenza lipschitziana (7)

Metodi espliciti: la classe di metodi più usata è quella dei metodi di Runge–Kutta

- Metodi di R–K ad uno stadio: Eulero in avanti

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k)$$

in questo caso l'ordine di consistenza è $p = 1$

- Metodi di R–K a due stadi

$$u_{k+1} = u_k + h \left[a_1 f(x_k, u_k) + a_2 f(x_k + bh, u_k + bh f(x_k, u_k)) \right]$$

in questo caso l'ordine di consistenza è $p = 2$, ma solo se i parametri a_1 , a_2 e b soddisfano opportune condizioni

Le condizioni che permettono il secondo ordine di consistenza sono

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b = 1/2 \end{cases}$$

Le scelte più classiche sono

- $a_1 = a_2 = 1/2, b = 1$, (Metodo di Heun)

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, u_k) + f(x_k + h, u_k + hf(x_k, u_k)) \right]$$

- $a_1 = 0, a_2 = 1, b = 1/2$, (Metodo di Eulero modificato)

$$u_{k+1} = u_k + hf \left(x_k + \frac{h}{2}, u_k + \frac{h}{2} f(x_k, u_k) \right)$$

La **struttura generale** dei metodi di R–K espliciti è

$$\Phi(h, x_k, u_k) = \sum_{i=1}^q a_i F_i(h, x_k, u_k)$$
$$F_i(h, x_k, u_k) = f \left(x_k + b_i h, u_k + b_i h \sum_{j<i} c_{ij} F_j(h, x_k, u_k) \right)$$

dove le costanti a_i , b_i e c_{ij} vengono determinate in modo da ottenere l'**ordine di consistenza massimo**.

- Come si è visto, in generale tale scelta **non è unica**
- A partire dall'ordine 5, **non è possibile ottenere l'ordine di consistenza p con un metodo a p stadi**.

Un metodo di R–K di **quarto ordine** si ottiene in particolare ponendo

$$\Phi(h, x_k, u_k) = \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

in cui:

$$F_1(h, x_k, u_k) = f(x_k, u_k)$$

$$F_2(h, x_k, u_k) = f(x_k + h/2, u_k + h/2F_1)$$

$$F_3(h, x_k, u_k) = f(x_k + h/2, u_k + h/2F_2)$$

$$F_4(h, x_k, u_k) = f(x_k + h, u_k + hF_3)$$

- Storicamente, questo è stato **uno dei primi metodi costruiti con questa strategia**, e resta ancora oggi molto utilizzato

La condizione che caratterizza la regione di stabilità assoluta di uno schema di R–K di ordine p a p stadi è

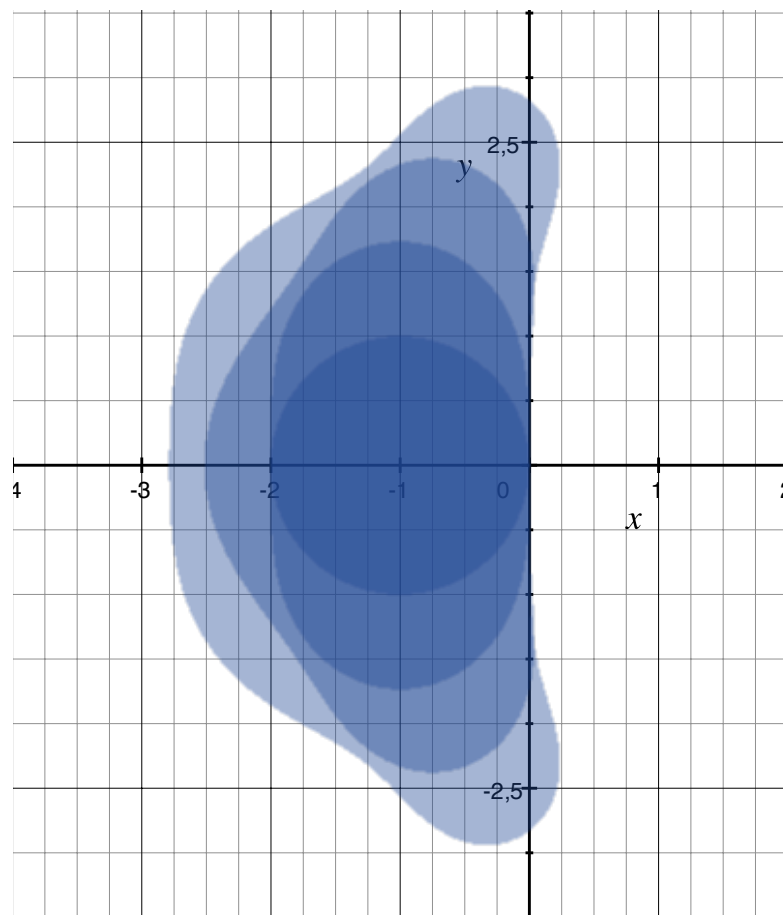
$$|T_p(h\lambda)| < 1$$

in cui $T_p(z)$ è il polinomio di Taylor di ordine p di e^z . In particolare, si ottiene per il metodo di Eulero esplicito la condizione

$$|1 + z| < 1$$

e per tutti i metodi del secondo ordine la condizione

$$\left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| < 1$$



regioni di stabilità assoluta per il metodi di RK di ordine 1–4

Metodi impliciti: i due metodi impliciti ad un passo più utilizzati sono

- Metodo di Eulero all'indietro

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1})$$

in questo caso l'ordine di consistenza è $p = 1$

- Metodo di Crank–Nicolson

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}) \right]$$

in questo caso l'ordine di consistenza è $p = 2$

La condizione che caratterizza la regione di stabilità assoluta di uno schema implicito è del tipo

$$|g(h\lambda)| < 1$$

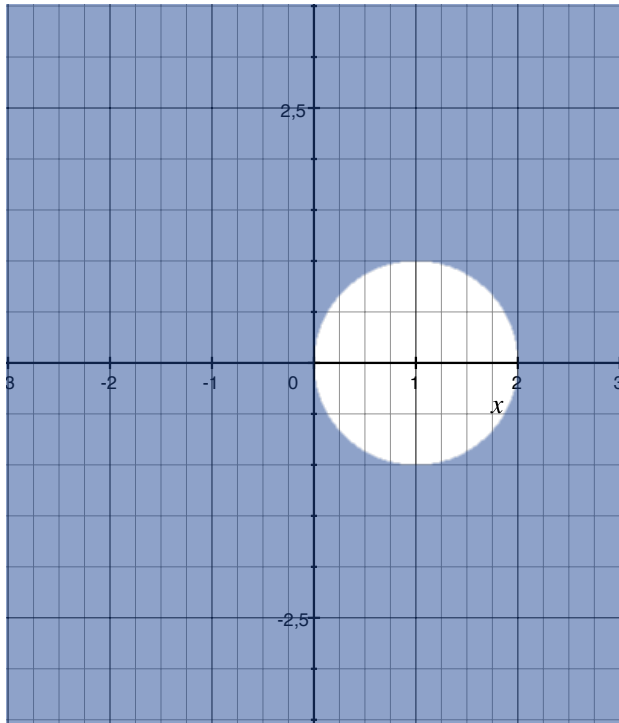
in cui $g(z)$ è una funzione razionale, l'approssimante di Padé di e^z . In particolare, per il metodo di Eulero implicito si ha la condizione

$$\left| \frac{1}{1-z} \right| < 1$$

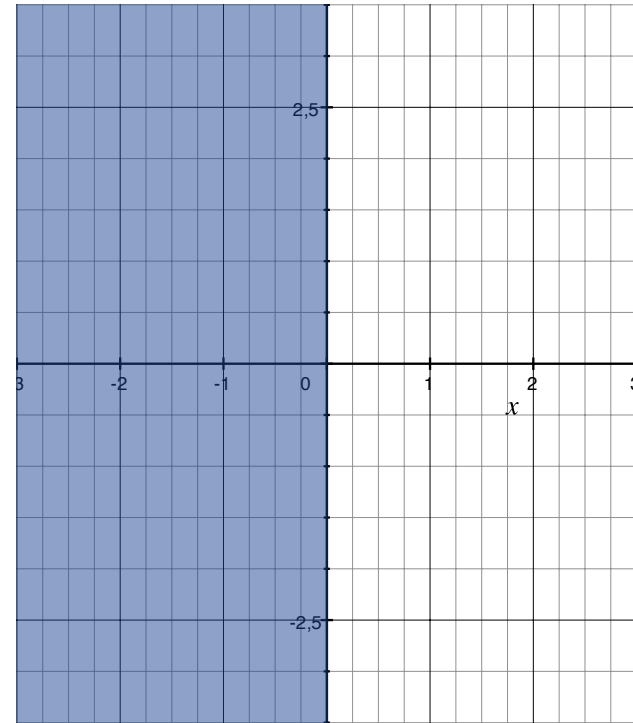
e per il metodo di Crank–Nicolson

$$\left| \frac{1+z/2}{1-z/2} \right| < 1$$

(in entrambi i casi, si verifica che i metodi sono A–stabili)



Eulero Implicito



Crank-Nicolson

Il calcolo effettivo di u_{k+1} nei metodi impliciti si effettua

- per sistemi differenziali lineari del tipo $y' = Ay$, tramite un sistema lineare algebrico, ad esempio

$$(I - hA)u_{k+1} = u_k$$

per il metodo di Eulero implicito, e

$$\left(I - \frac{hA}{2}\right)u_{k+1} = \left(I + \frac{hA}{2}\right)u_k$$

per il metodo di Crank–Nicolson. In questo caso, conviene fattorizzare una volta per tutte la matrice del sistema ($I - hA$ o $I - hA/2$) per avere una complessità $O(n^2)$ (invece che $O(n^3)$) per ogni passo di avanzamento

- Per i sistemi nonlineari, si può utilizzare un metodo di **sostituzioni successive**, ad esempio per il metodo di Eulero implicito

$$u_{k+1}^{(n+1)} = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})$$

Tuttavia, per questa strada **si ottiene una contrazione a patto che $h < L_f$** , e questo **annulla il vantaggio di utilizzare un metodo A–stabile**.

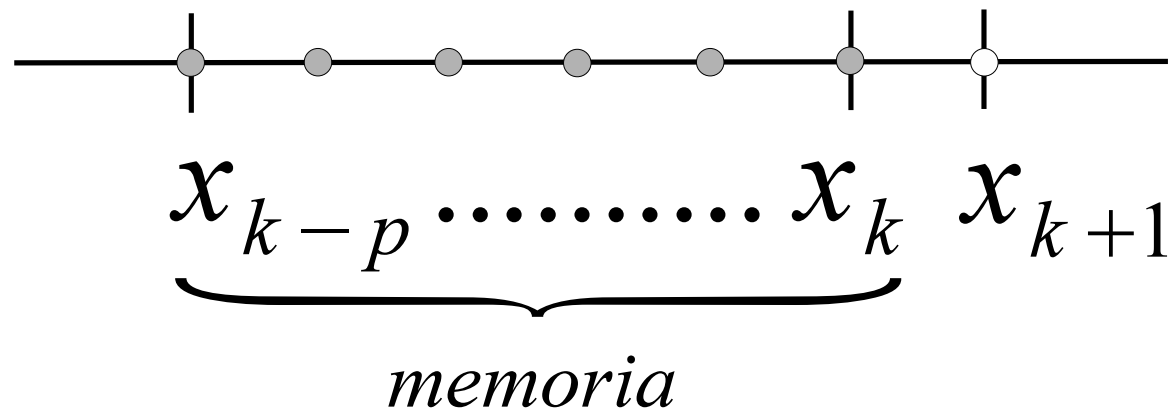
Il calcolo di u_{k+1} nel caso nonlineare si effettua invece preferibilmente tramite il **metodo di Newton**, con una approssimazione iniziale calcolata con un metodo esplicito

Metodi multistep e relativa analisi

Al contrario dei metodi ad un passo, in cui per avanzare si utilizza solo l'informazione dell'ultimo passo calcolato, i **metodi a più passi** sono metodi **con memoria**, che utilizzano informazioni **dall'ultimo passo e dai p precedenti**. La forma generale di un metodo multistep lineare (LMM) a $p + 1$ passi è

$$\begin{cases} u_{k+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{k-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{k-j}, u_{k-j}) \\ u_0 = y_0 \\ u_1, \dots, u_p \text{ dati} \end{cases} \quad (8)$$

- I “**valori di innesco**” u_1, \dots, u_p si calcolano in altro modo, ad esempio con uno schema ad un passo. Se $b_{-1} \neq 0$ lo schema è **implicito**



Memoria nei metodi a più passi

- In fase di implementazione, i metodi multistep hanno bisogno da una lato di gestire una coda di valori u_{k-p}, \dots, u_k nella memoria dello schema, e dall'altro di generare a parte i valori di innesco
- D'altra parte, richiedono di calcolare la funzione f una sola volta per ogni passo, e quindi sono meno complessi dei metodi ad un passo specie per alti ordini di consistenza (nei metodi di RK f si calcola tante volte quanti sono gli stadi)
- Tuttavia, la presenza di una memoria rende la struttura algebrica delle soluzioni molto più complessa

Esempio: Metodo del punto medio (o midpoint) – è un metodo LMM nella forma

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k)$$

- E' un metodo **esplicito**, a due passi: usa le informazioni nei punti x_k e x_{k-1}
- $a_1 = 1$, $a_j = 0$ per $j \neq 1$
- $b_0 = 2$, $b_j = 0$ per $j \neq 0$
- Oltre al valore iniziale u_0 , richiede un valore ulteriore di innesco u_1

La *convergenza per $h \rightarrow 0$* degli schemi a più passi si definisce in modo analogo a quello dei metodi ad un passo, ma richiedendo che *anche i valori di innesco convergano ai valori corretti della soluzione.*

- Definiamo lo schema (8) *convergente* se:

$$\|y(x_k) - u_k\| \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow 0$, e $u_k \rightarrow y(x_k)$ per $k = 1, \dots, p$, con k tale che $x_k \in [x_0, x_0 + M]$.

- Anche nel caso dei metodi multistep, la convergenza viene dimostrata a partire da *consistenza e stabilità (opportunamente definite)*

Analogamente ai metodi ad un passo, l'*errore locale di troncamento* o *errore di consistenza* $\tau(x, y; h)$ è definito nei metodi a più passi mediante la relazione:

$$\left| y(x+h) - \sum_{j=0}^p a_j y(x-jh) - h \sum_{j=-1}^p b_j f(x-jh, y(x-jh)) \right| = h\tau(x, y; h). \quad (9)$$

- Definiamo *consistente* lo schema (8) se $\tau(x, y; h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ (consistente con ordine p se $\tau(x, y; h) = O(h^p)$)

Pur essendo possibile applicare comunque la definizione, la struttura dello schema (8) permette di riportare la condizione di consistenza a condizioni algebriche sui coefficienti.

- Sostituendo i valori $y(x - jh)$ con i loro sviluppi di Taylor, si dimostra che uno schema a più passi è consistente con ordine $q \geq 1$ se e solo se

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^p a_j = 1, \\ \sum_{j=0}^p (-j)^i a_j + i \sum_{j=-1}^p (-j)^{i-1} b_j = 1 \quad (i = 1, \dots, q) \end{cases}$$

(dove si conviene di porre $(-j)^{i-1} = 1$ se $j = 0$ ed $i = 1$).

Nel caso del **metodo midpoint**, si ottiene:

$$\sum_j a_j = a_1 = 1$$

e, per $i = 1$, la seconda condizione dà

$$\sum_j -ja_j + \sum_j b_j = -a_1 + b_0 = 1$$

mentre per $i = 2$ si ha

$$\sum_j j^2 a_j + \sum_j -jb_j = a_1 = 1.$$

Lo schema è quindi **consistente con ordine $q = 2$** (la verifica di consistenza per $i = 3$ darebbe un risultato negativo).

Per definire la *zero-stabilità* di schemi a più passi, consideriamo due soluzioni numeriche u_k e v_k , ottenute tramite (8) a partire da due diversi *insiemi di dati iniziali* u_0, \dots, u_p e v_0, \dots, v_p .

- Definiamo *zero-stabile* uno schema per il quale esiste una costante C indipendente da h tale che

$$\|u_k - v_k\| \leq C \cdot \max(\|u_0 - v_0\|, \dots, \|u_p - v_p\|)$$

per ogni $h < h_0$, e per $k \in [0, M/h]$

Per effettuare l'analisi di stabilità dei metodi a più passi, si definiscono i polinomi

$$\rho(\zeta) = \zeta^{p+1} - \sum_{j=0}^p a_j \zeta^{p-j}$$

$$\sigma(\zeta) = \sum_{j=-1}^p b_j \zeta^{p-j}$$

$$P(\zeta) = \rho(\zeta) - h\lambda\sigma(\zeta).$$

- In particolare, le radici del polinomio ρ sono legate alla zero-stabilità dello schema, mentre quelle del polinomio P alla stabilità assoluta. Le radici di questi polinomi giocano il ruolo di autovalori dello schema

La **zero-stabilità** dei metodi multistep lineari si dimostra essere equivalente alla cosiddetta *condizione delle radici*:

• Un metodo multistep nella forma (8) è **zero-stabile** se e solo se, indicando con ζ_i ($i = 1, \dots, p + 1$) le radici del polinomio $\rho(\zeta)$, si ha

a) $|\zeta_i| \leq 1$ per ogni i ,

b) tutte le radici tali che $|\zeta_i| = 1$ sono radici semplici.

Nel caso del **metodo midpoint**, si ottiene:

$$\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$$

e le due radici valgono dunque

$$\zeta_{1,2} = \pm 1$$

Si tratta quindi di **due radici di modulo unitario**, ma **entrambe semplici**.

La condizione delle radici è quindi soddisfatta.

- Si noti che **all'aumentare del numero di passi**, **aumenta il grado del polinomio ρ** e quindi il numero delle radici. La condizione delle radici diviene quindi **sempre più vincolante**

La **stabilità assoluta** dei metodi multistep lineari si dimostra essere equivalente ad una condizione più forte, detta **condizione assoluta delle radici**:

- Un metodo multistep nella forma (8) è **assolutamente stabile** in corrispondenza ad un certo valore $z = h\lambda \in \mathbb{C}$ se e solo se tutte le radici $\zeta_i(z)$ ($i = 1, \dots, p + 1$) del polinomio $P(\zeta)$ soddisfano la condizione

$$|\zeta_i(z)| < 1. \quad (10)$$

Nel caso del **metodo midpoint**, si ha:

$$P(\zeta) = \zeta^2 - 2h\lambda\zeta - 1$$

e le due radici valgono

$$\zeta_{1,2}(h\lambda) = h\lambda \pm \sqrt{1 + h^2\lambda^2}.$$

Per $h \rightarrow 0$, le radici si possono sviluppare nella forma

$$\begin{aligned}\zeta_{1,2}(h\lambda) &\approx h\lambda \pm \left(1 + h^2\lambda^2/2\right) = \\ &= \pm 1 + h\lambda \pm h^2\lambda^2/2\end{aligned}$$

Quindi, per h piccolo, almeno una delle radici è fuori dal disco unitario se $Re(h\lambda) \neq 0$. La condizione (10) non è perciò mai soddisfatta.

La condizione assoluta delle radici si può interpretare più intuitivamente tornando al **problema modello** $y' = \lambda y$. Applicando il metodo midpoint si ottiene

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2h\lambda u_k. \quad (11)$$

Cercando ora **soluzioni fondamentali** nella forma $u_k = \zeta^k$, si ha

$$\zeta^{k+1} = \zeta^{k-1} + 2h\lambda\zeta^k,$$

e dividendo per ζ^{k-1} si riottiene **l'equazione caratteristica**

$$\zeta^2 - 2h\lambda\zeta - 1 = 0.$$

(notare che le soluzioni fondamentali **convergono a zero se e solo se** $|\zeta_i| < 1$)

Una ulteriore maniera di interpretare la condizione assoluta delle radici è di porre l'equazione (11) in forma di sistema alle differenze di primo ordine, definendo la variabile ausiliaria $w_k = u_{k-1}$:

$$\begin{cases} w_{k+1} = u_k \\ u_{k+1} = w_k + 2h\lambda u_k \end{cases}$$

cioè, in forma matriciale:

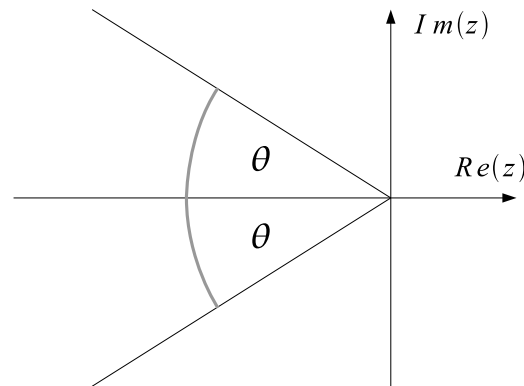
$$\begin{pmatrix} w_{k+1} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2h\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k \\ u_k \end{pmatrix}.$$

$P(\zeta)$ coincide con il polinomio caratteristico della matrice del sistema (cosa che spiega perché le soluzioni fondamentali abbiano la struttura ζ_i^k).

Nonostante apparentemente nel costruire metodi LMM ci siano moltissimi gradi di libertà, esistono **vincoli algebrici che non sono aggirabili**. I due principali vanno sotto il nome di *barriere di Dahlquist*.

- **Prima barriera di Dahlquist**: Non esistono metodi multistep nella forma (8), zero-stabili, con ordine di consistenza maggiore di $p + 2$ se p è pari, di $p + 3$ se p è dispari.
- **Seconda barriera di Dahlquist**: Non esistono metodi multistep lineari nella forma (8), di ordine maggiore di 2, che siano A-stabili. Se espliciti, i metodi multistep lineari non possono essere A-stabili per alcun ordine.

La seconda barriera di Dahlquist mostra che il requisito di A-stabilità è eccessivamente restrittivo. Un criterio meno restrittivo è quello di θ -stabilità, in cui la convergenza a zero delle soluzioni discrete non avviene su tutto il semipiano a parte reale negativa, ma solo su un settore di ampiezza θ contenente il semiasse reale negativo:



[indice](#)

Metodi multistep espliciti ed impliciti

La costruzione delle classi più note di metodi multistep segue due strategie principali:

- Lo schema è una **versione discreta della equazione di Volterra**

$$y(x_{k+1}) = y(x_{k-r}) + \int_{x_{k-r}}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx$$

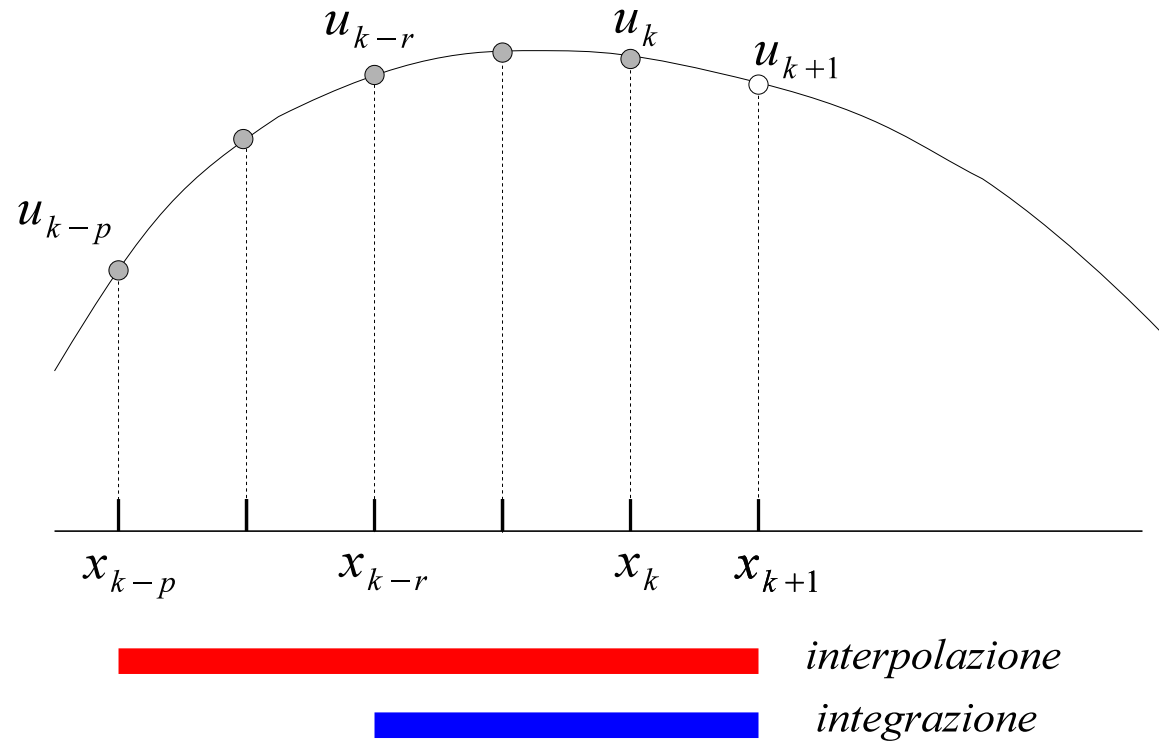
- Lo schema utilizza i valori “di memoria” della soluzione per costruire una **approssimazione della derivata**

$$y'(x_{k+1}) = f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

Nella prima strategia (che corrisponde ai cosiddetti metodi di Adams e a quelli di Nyström), la prima sommatoria si riduce all'elemento u_{k-r} , mentre la seconda rappresenta una formula di quadratura costruita su un sottoinsieme dei valori $f(x_{k-p}, u_{k-p}), \dots, f(x_k, u_k)$ se il metodo è esplicito, o $f(x_{k-p}, u_{k-p}), \dots, f(x_{k+1}, u_{k+1})$ se il metodo è implicito:

$$u_{k+1} = u_{k-r} + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{k-j}, u_{k-j})$$

- Nei metodi di Adams, in particolare, si ha sempre $r = 0$ (cioè l'integrazione si effettua sempre tra x_k e x_{k+1})



Intervallo di integrazione e massimo intervallo di interpolazione, per i metodi di Adams e di Nyström

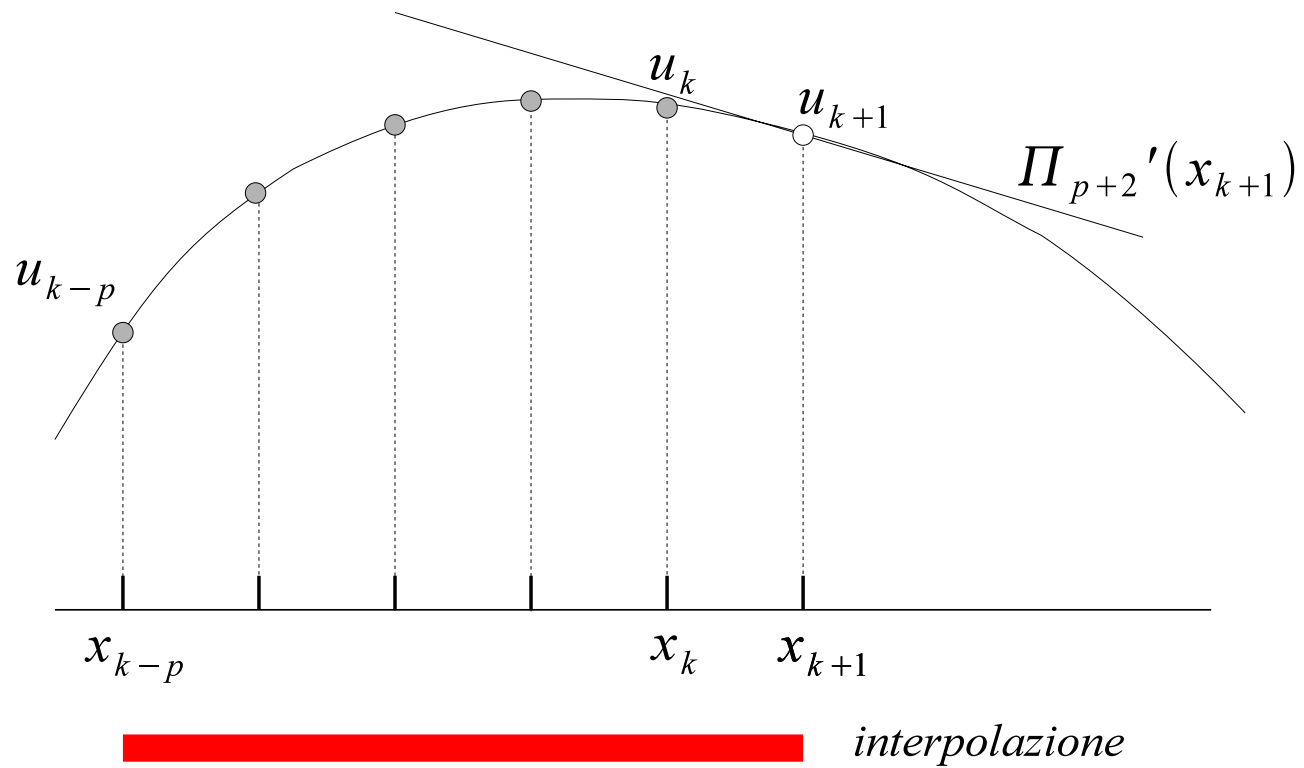
Nella seconda strategia (che corrisponde ai cosiddetti metodi **BDF**), la seconda sommatoria si riduce all'elemento $b_{-1}f(x_{k+1}, u_{k+1})$, ottenendo la forma

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{k-j} + hb_{-1}f(x_{k+1}, u_{k+1})$$

che si può riscrivere come

$$\frac{u_{k+1} - \sum_{j=0}^p a_j u_{k-j}}{hb_{-1}} = f(x_{k+1}, u_{k+1})$$

in cui a primo membro si cerca una approssimazione della derivata $y'(x_{k+1})$ (ottenuta derivando il polinomio interpolatore costruito sui nodi x_{k-p}, \dots, x_{k+1}).



Intervallo di stima della derivata, per i metodi BDF

I due metodi di Nyström più noti sono:

- Il metodo midpoint (secondo ordine)

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k)$$

- Il metodo di Simpson (quarto ordine)

$$u_{k+1} = u_{k-1} + \frac{h}{3}[f(x_{k-1}, u_{k-1}) + 4f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})]$$

Questi due metodi sono ottenuti applicando le rispettive quadrature di Newton–Cotes. Entrambi questi metodi sono reversibili, cioè integrati all'indietro ripercorrono la stessa soluzione calcolata in avanti.

Metodi di Adams: sono nella forma

$$u_{k+1} = u_k + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{k-j}, u_{k-j})$$

e si dividono in due sottoclassi:

- **Metodi di Adams–Bashforth** (espliciti), per i quali $b_{-1} = 0$, l'intervallo di interpolazione è $[x_{k-p}, x_k]$ e il polinomio interpolatore è di grado p
- **Metodi di Adams–Moulton** (impliciti), per i quali $b_{-1} \neq 0$, l'intervallo di interpolazione è $[x_{k-p}, x_{k+1}]$ e il polinomio interpolatore è di grado $p + 1$

| p | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 |
|-----|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | | |
| 2 | $\frac{23}{12}$ | $-\frac{16}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | |
| 3 | $\frac{55}{24}$ | $-\frac{59}{24}$ | $\frac{37}{24}$ | $-\frac{9}{24}$ |

Coefficienti dei metodi di Adams–Bashforth per $p = 0, \dots, 3$
(caso particolare: **Eulero esplicito per $p = 0$**)

| p | b_{-1} | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 |
|-----|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |
| 1 | $\frac{5}{12}$ | $\frac{8}{12}$ | $-\frac{1}{12}$ | | |
| 2 | $\frac{9}{24}$ | $\frac{19}{24}$ | $-\frac{5}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | |
| 3 | $\frac{251}{720}$ | $\frac{646}{720}$ | $-\frac{264}{720}$ | $\frac{106}{720}$ | $-\frac{19}{720}$ |

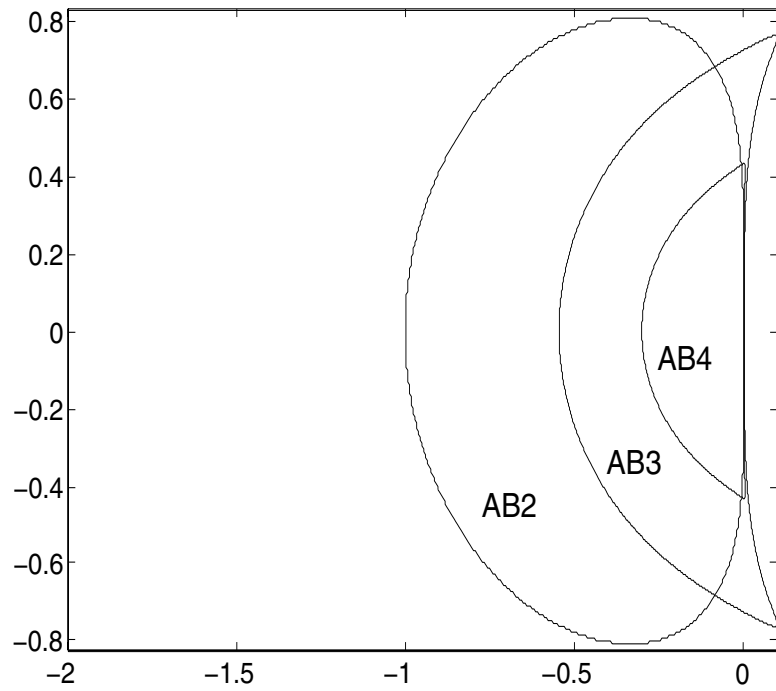
Coefficienti dei metodi di Adams–Moulton per $p = 0, \dots, 3$
(caso particolare: Crank–Nicolson per $p = 0$)

- Il polinomio $\rho(\zeta)$ ha **sempre** la forma

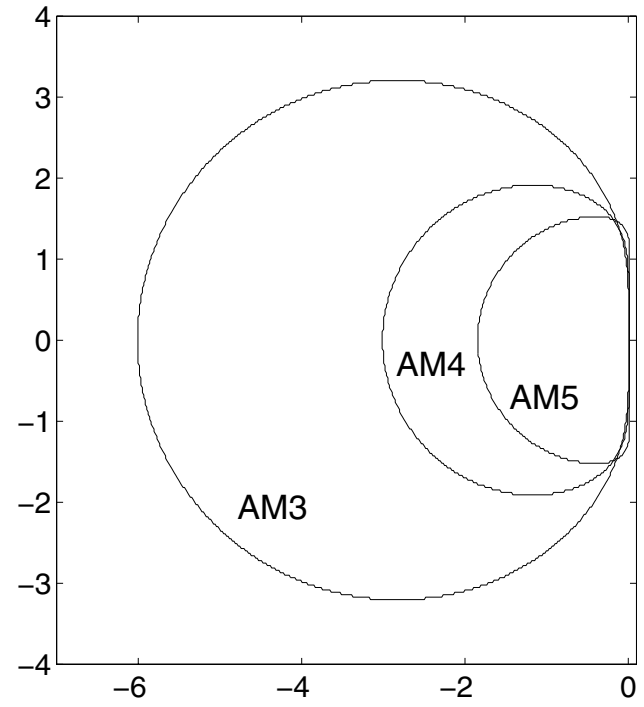
$$\rho(\zeta) = \zeta^{p+1} - \zeta^p$$

e quindi **la condizione delle radici è sempre soddisfatta** (una radice semplice in $\zeta = 1$, una radice di molteplicità p in $\zeta = 0$)

- L'ordine di consistenza è **pari al grado del polinomio interpolatore più uno** ($p + 1$ per i metodi espliciti, $p + 2$ per quelli impliciti)
- La regione di stabilità assoluta è **non vuota, sempre limitata** (meno che nel caso del metodo di Crank–Nicolson), e considerevolmente **più grande per i metodi impliciti**



Adams–Bashforth



Adams–Moulton

Anche nel caso dei metodi multistep impliciti, ed in particolare nei metodi di Adams, si può calcolare u_{k+1} risolvendo un sistema lineare (se il problema continuo è lineare), oppure per via iterativa:

$$u_{k+1}^{(n+1)} = u_k + h \sum_{j=0}^p b_j f(x_{k-j}, u_{k-j}) + hb_{-1} f(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})$$

- In questo caso, una buona approssimazione iniziale è data dal valore di u_{k+1} che si calcolerebbe col metodo di Adams esplicito corrispondente (strategia *predictor-corrector*)
- Con questa scelta, il massimo ordine di consistenza si ottiene già alla prima iterazione

Metodi BDF: sono nella forma

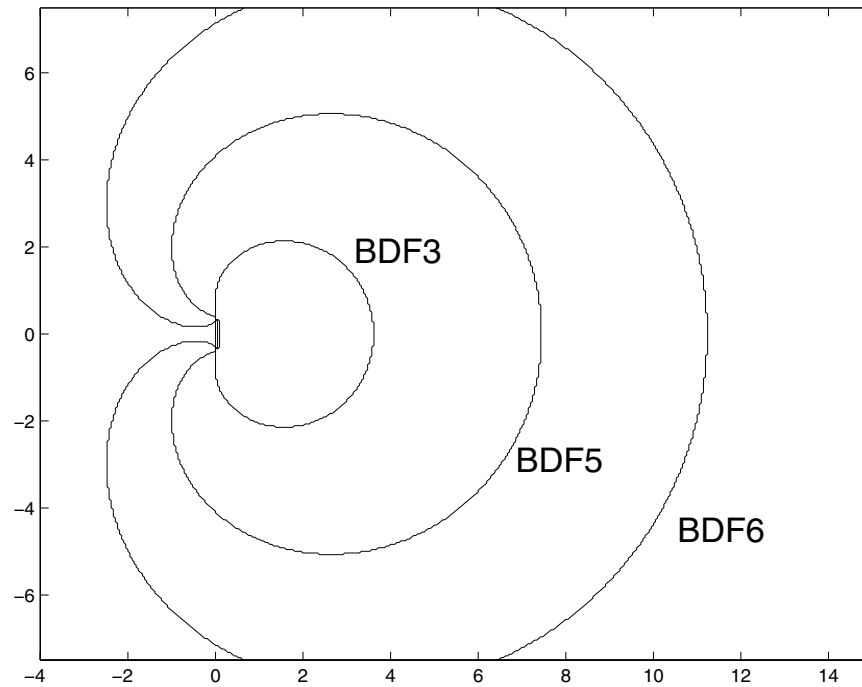
$$u_{k+1} = \sum_{j=-1}^p a_j u_{k-j} + hb_{-1} f(x_{k+1}, u_{k+1})$$

- I coefficienti si ottengono costruendo il polinomio interpolatore dei valori u_{k-j} (per $j = -1, \dots, p$), derivandolo in x_{k+1} e uguagliando questa derivata a $f(x_{k+1}, u_{k+1})$
- Sono sempre metodi impliciti

| p | b_{-1} | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 |
|-----|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 1 | 1 | | | |
| 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | | |
| 2 | $\frac{6}{11}$ | $\frac{18}{11}$ | $-\frac{9}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | |
| 3 | $\frac{12}{25}$ | $\frac{48}{25}$ | $-\frac{36}{25}$ | $\frac{16}{25}$ | $-\frac{3}{25}$ |

Coefficienti dei metodi BDF per $p = 0, \dots, 3$
(caso particolare: **Eulero implicito per $p = 0$**)

- Il polinomio $\rho(\zeta)$ soddisfa la condizione delle radici per $p \leq 5$
- L'ordine di consistenza è pari al numero $p + 1$ dei passi
- La regione di stabilità assoluta è il complementare di un insieme limitato (Eulero implicito e BDF2 sono A-stabili, gli altri sono θ -stabili)
- Sono probabilmente gli schemi preferiti per problemi con componenti della soluzione velocemente convergenti ad un punto di stabilità (*problemi stiff*)



Regioni di stabilità assoluta dei metodi BDF

[indice](#)