Esercizi. Assegnazione 7 (ultima; 24/5/07)

Es 20 Sia ℓ^2 lo spazio di Hilbert (reale) delle successioni $x = \{x_n : n \geq 1\}$ tali che $\|x\|_2^2 = (x, x) = \sum_{n\geq 1} x_n^2 < \infty$.
(i) Si costruisca un operatore compatto autoaggiunto T il cui spettro sia $\sigma(T) = \{(-1)^n/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$.
(ii) Si costruisca un operatore autoaggiunto e limitato T il cui spettro sia $\sigma(T) = \{1 - (1/n) : n \geq 1\} \cup \{1\}$ e si dimostri che non è compatto esibendo una successione limitata $\{x^{(n)}\} \subset \ell^2$ tale che $Tx^{(n)}$ non ammetta sottosuccessioni convergenti.
Sia H uno spazio di Hilbert (reale) separabile con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e base ortonormale $\{e_n\}$; sia $\{\lambda_n\}$ una successione limitata di numeri reali e sia

$$T : x \in H \to Tx = \sum_{n\geq 1} \lambda_n (e_n, x) e_n \ .$$

(iii) Si dimostri che T è un operatore autoaggiunto limitato e che $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n\}}$.
(iv) Per quali $\{\lambda_n\}$ T è a rango finito? Per quali $\{\lambda_n\}$ T è compatto?

Es 21 Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una varietà compatta immersa in $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che esiste un atlante finito $\{(U_i, \Phi_i)\}$, $U_i \subset \mathbb{R}^2$ e Φ_i inclusione regolare, per cui esistono c_1, c_2 e δ_0 tali che

$$c_1 |u - v| \leq |\Phi_i(u) - \Phi_i(v)| \leq c_2 |u - v| \ , \qquad \forall\ u, v \in U_i\ ,\ |u - v| \leq \delta_0\ .$$

Trovare valori di c_1 e c_2 nel caso Σ si il bordo di un ellissoide di semiassi $a \geq b \geq c > 0$ e nel caso caso in cui Σ sia il toro ottenuto ruotando il cerchio $\{x_1 = 0, (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = 1\}$ attorno all'asse delle x_3.

Es 22 Con le notazioni e definizioni del file

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM6_06_07/Dirichlet0607.pdf

pagina 11, si dimostri che se

$$\partial_\nu v(x_0\pm) = \lim_{t>0, t\to 0} \frac{v(x_0 \pm t\nu(x_0)) - v(x_0\pm)}{\pm t}$$

(dove $v(x_0\pm)$ denota il limite di $v(y)$ per $y \to x_0$, rispettivamente, dall'esterno e dall'interno di D) allora $\partial_\nu v(x_0+) = \partial_\nu v(x_0-)$. Si dimostri, poi, che $v \equiv 0$ in $\overline{D}^c$.