Definizione Dati due operatori illimitati A_1 eA_2 diremo che A_2 **estende** A_1 se $G(A_1) \subset G(A_2)$. Un operatore A si dice **chiudibile** se ammette una estensione chiusa. Ogni operatore A chiudibile ammette un'estensione minima che prende il nome di **chiusura** di A e si denota $\overline{A}$.

Es 9 (i) Siano E ed F due s.v.n. e sia $W \subset E \times F$. Dimostrare che W è il grafico di un operatore lineare (illimitato) se e solo se

$$(*) \begin{cases} \text{(i)} \quad W \text{ è uno spazio vettoriale} \\ \text{(ii)} \quad (0, y) \in W \quad \Longrightarrow \quad y = 0\ . \end{cases}$$

(ii) Sia W come in $(*)$; definire l'operatore illimitato A il cui grafico è W.

(iii) Dimostrare che se A è chiudibile allora $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

Es 10 Si consideri lo spazio di Banach $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$; sia $\hat{x} := \{1/n^2\}_{n\geq 1}$. Sia $D(A)$ lo spazio vettoriale generato da f (notazioni come nell'Es. 8) e da $\hat{x}$; se $z = x + t\hat{x} \in D(A)$ (con $x \in f$) definiamo

$$Az = t\hat{x}\ .$$

Dimostrare che $(\hat{x}, \hat{x})$ e $(\hat{x}, 0)$ appartengono a $\overline{G(A)}$ e dedurne che A è un operatore illimitato (con dominio denso) non chiudibile.

Es 11 Si consideri lo spazio di Banach $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Sia $D(A) := f$ e, per $x \in f$ sia $(Ax)_j = jx_j$, ossia $A : (x_1, x_2, x_3, ...) \in f \to (x_1, 2x_2, 3x_3, ...) \in f$. Dire se A è chiudibile ed in caso affermativo descrivere $\overline{A}$.