Es 7 (i) Si dimostri la disuguaglianza di Young:

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \ , \qquad \forall\ s, t \geq 0 \ , \quad \forall\ p, q > 1 : \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ . \tag{Y}$$

(ii) Si dimostri la disuguaglianza di Hölder: per ogni $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $p, q > 1$ come in (Y)

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \ . \tag{H}$$

(iii) Si dimostri a disuguaglianza di Minkowski: per ogni $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $p \geq 1$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{M}$$

Es 8 Sia $X := \Big\{ x := \{x_n\}_{n \geq 1} \text{ t.c. } \ x_n \in \mathbb{R} \Big\}$ lo spazio vettoriale delle successioni a valori in $\mathbb{R}$ e si definiscano i seguenti sottoinsiemi di X:

$$\begin{aligned}
\ell_\infty \ &:= \ \Big\{ x \in X : \ \|x\|_\infty := \sup_n |x_n| < \infty \Big\} \\
c_0 \ &:= \ \Big\{ x \in X : \ \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \Big\} \\
\ell_p \ &:= \ \Big\{ x \in X : \ \|x\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p} < \infty \Big\} \\
s \ &:= \ \Big\{ x \in X : \ \lim_{n \to \infty} n^p x_n = 0 \ \forall\ p \geq 1 \Big\} \\
f \ &:= \ \Big\{ x \in X : \ \exists n_0 \text{ t.c. } x_n = 0 \ \forall\ n \geq n_0 \Big\}
\end{aligned}$$

(i) Si dimostri che $\big(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty\big)$, $\big(c_0, \|\cdot\|_\infty\big)$, $\big(\ell_p, \|\cdot\|_p\big)$ sono spazi di Banach (normati e completi). Si dimostri che $s \subset \ell_p$ per ogni $p \geq 1$.

(ii) Si dimostri che f è denso in ℓ_p e in c_0. Si dimostri che ℓ_p e c_0 sono separabili (ossia hanno un sottoinsieme numerabile denso).

(iii) Si dimostri che ℓ_∞ non è separabile.

(iv) Si dimostri che $\ell_1' = \ell_\infty$ (ℓ_1'= duale di ℓ_1). Si dimostri che $c_0' = \ell_1$. Si dimostri che, per $p > 1$, $\ell_p' = \ell_q$ dove q è come in (Y).