Es 14 Siano E ed F due spazi di Banach.
(i) Sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$ (:= spazio vettoriale degli operatori lineari e continui da E in F). Dimostrare che

$$T^* \in \mathcal{L}(F', E') , \qquad \|T^*\| = \|T\| .$$

(ii) Sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dimostrare che $T^{**}|_E = T$ o, più precisamente, che

$$T^{**} j_E = j_F T ,$$

dove j_E e j_F denotano le immersioni canoniche nel biduale.
(iii) Sia $T : D(T) \subset E \to F$ un operatore lineare, chiuso con dominio denso. Dimostrare che

$$R(T) \text{ chiuso} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(T) = N(T^*)^\perp .$$

Es 15 (i) Sia E uno spazio metrico completo e sia $D \subset E$. Dimostrare l'equivalenza delle seguenti affermazioni:

(a) D è precompatto (cioè $\overline{D}$ è compatto)

(b) ogni successione in D ammette una sottosuccesione convergente

(c) $\forall\, \varepsilon > 0$ esistono N sfere $B_i(\varepsilon)$ tali che $D \subset \bigcup_{i=1}^N B_i(\varepsilon)$.

(ii) Sia $T \in \mathcal{K}(E, F)$ (:= spazio vettoriale degli operatori lineari e compatti da E in F). Dimostrare che se $\{x_n\}$ converge debolmente a x allora $Tx_n \to Tx$.
(iii) Sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E riflessivo. Se $Tx_n \to Tx$ per ogni successione $\{x_n\}$ debolmente convergente a x allora T è compatto.

Es 16 Sia $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ e si diano le seguenti definizioni

$$\hat{f}_n := \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} , \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} ;$$

$$S_N : f \to (S_N f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n \, e^{inx} , \qquad \forall N \geq 0 ;$$

$$C_N : f \to (C_N f)(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} (S_k f)(x) , \qquad \forall N \geq 0 ;$$

$$K_N(x) := \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{N+1}{2} x}{2\pi (N+1) \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} , \qquad \forall N \geq 0 .$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni[1].

(i) $(S_N f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+t)\ \dfrac{\text{sen }(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen }\frac{t}{2}}dt.$

(ii) $(C_N f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+t) K_N(t)dt$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = 1$ e per ogni $0 < \delta < 2\pi$, $K_N \to 0$ uniformemente su $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(iv) Se $f \in L^\infty([0,2\pi])$ ed è continua in x_0 allora

$$\lim_{N\to\infty} (C_N f)(x_0) = f(x_0)\ . \qquad \text{(Cesàro)}$$

(v) Se $f \in C_{\text{per}}([0,2\pi])$ (cioè $f \in C(\mathbb{R})$ e $f(x+2\pi) = f(x)$) allora[2]

$$\lim_{N\to\infty} \|C_N f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0\ .$$

(v) Se $f \in L^2([0,2\pi])$ allora[3]

$$\|f - S_N f\|_2 \le \|f - C_N f\|_2\ .$$

(vii) Se $f \in C^1_{\text{per}}([0,2\pi])$ (cioè $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(x+2\pi) = f(x)$) allora

$$\widehat{f'_n} = in\hat{f}_n\ , \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2|\hat{f}_n|^2 < \infty\ , \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty\ .$$

(viii) Se $f \in C^1_{\text{per}}([0,2\pi])$, allora

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0\ .$$

[1] Come d'uso comune, denotiamo ancora con $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'estensione 2π-periodica di $f \in L^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ cioè $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{2\pi n} f$ dove $(\tau_y g)(x) = g(x+y)$ è l'operatore di traslazione.

[2] $\|\cdot\|_{C[0,2\pi]}$ denota la norma del massimo.

[3] $\|\cdot\|_2$ denota la norma L^2.