Prova scritta di AM4 del 9/1/2006 – (II Esonero)

- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**
- **Svolgere prima la Parte I.**

Parte I

1) (i) Dare la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
(ii) Dare la definizione generale di σ–algebra e di misura σ–additiva.
(iii) Trovare due misure μ_1 e μ_2 definite su $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ (gli insiemi di $\mathbb{R}^2$ misurabili secondo Lebesgue), finite (cioè $\mu_i(\mathbb{R}^2) < \infty$) tali che μ_1 è assolutamente continua rispetto a m (la misura di Lebesgue) e μ_2 non è assolutamente continua rispetto a m.
(iv) Dimostrare che, eccettuata la misura identicamente nulla, non esistono misure σ–additive su $\mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$ finite ed invarianti per traslazione.

2) "Le sezioni di insiemi di misura nulla sono quasi–ovunque nulle": enunciare in modo più preciso tale risultato e dimostrarlo.

3) Si calcoli la lunghezza della curva $\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = x^2, \; 0 \le x \le \frac{1}{2}\Big\}$.

Parte II

4) Si dia la definizione di misura di un elemento di k–varietà in $\mathbb{R}^n$ e se ne discuta l'invarianza per cambi di coordinate.

5) (i) Siano v e w due vettori in $\mathbb{R}^2$ e si definisca il parallelogramma $\Pi[v, w]$ generato da v e w.
(ii) Assumendo nota la formula $\text{Area}(\Pi[v, w]) = \det[v, w]$ si dimostri che se $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un diffeomorfismo C^1 allora

$$\text{Area}\,(\phi([0,1]^2)) = \int_{[0,1]^2} \Big|\det \phi'\Big| dxdy \; .$$

6) Sia $\omega_a = (\cos x + axy)dx + x^2 dy$. Dire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui ω_a è esatta su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, trovare una primitiva di ω_a per tali valori.