Prova scritta di AM4 del 26/1/2005
Appello A e recupero esoneri

Recupero I esonero: esercizi da 1) a 4).
Recupero II esonero: esercizi da 5) a 9).
Appello A: esercizi 3), 4), 5), 7), 8).
Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

1) Sia C l'insieme ternario di Cantor in $[0,1]$.
(i) Dimostrare che C ha la cardinalità del continuo.
(ii) Dimostrare che C è misurabile secondo Peano–Jordan ed ha misura nulla.
(iii) Dimostrare che se $[a,b] \subset C$ allora $a = b$.

2) (i) Illustrare in modo sintetico la costruzione della curva di Peano $\varphi : [0,1] \to [0,1]^2$.
(ii) Dimostrare che $\varphi \notin C^1$.
(iii) Dimostrare che φ è continua.

3) (i) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione C^1. Dato un disco chiuso D di raggio $r > 0$, trovare $\rho > 0$ ed un cubo K di lato ρ tale che $f(D) \subset K$.
(ii) Sia $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = \frac{1}{x} \text{ sen} \frac{1}{x},\ x \in (0,1)\right\}$. Dimostrare che $\overline{E}$ è di misura nulla.

4) Sia $M \in \text{Mat}(2 \times 2)$.
(i) Dimostrare che se $\det M = 0$ allora MA è di misura nulla per ogni $A \subset \mathbb{R}^2$.
(ii) Dimostrare che $\text{mis}(M[0,1]^2) = |\det M|$.

5) Sia $f \in C^1_{\text{per}}$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $N \geq M$

$$\Big| f(x) - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n \, e^{inx} \Big| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} \ .$$

6) Sia f la funzione che coincide con $1 + \cos x$ per $x \in [-\pi, \pi]$ e nulla al di fuori di tale intervallo. Calcolare una costante $M > 0$ tale che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{1 + |\xi|} \ , \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \ .$$

7) Sia $f = e^{-x}$ per $x \geq 0$ e $f = 0$ altrimenti. Trovare $u(x,t)$ tale che

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + tu = 0 \ , & t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \\ u(0,x) = f(x) \ . \end{cases}$$

8) Sia E il semipiano aperto superiore in $\mathbb{R}^2$. Definire l'integrale di Riemann generalizzato su E. Discutere le proprietà fontamentali di tale nozione ed illustrarla con esempi e controesempi.

9) Sia f la funzione con supporto in $[0,2]$ che vale 1 su $[0,1]$ e 2 su $(1,2]$. Trovare esplicitamente una funzione $\varphi \in C^\infty$con supporto in $[0,2]$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f - \varphi| \leq 1/10$.