Prova scritta di AM4 del 6/9/2004 - Appello X

1. Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici, etc.
2. Per superare la prova è necessario svolgere l'esercizio 1.

1) (i) Si consideri la seguente curva e se ne disegni la traccia:

$$\varphi : I := [-\pi/2, \pi/2] \to \varphi(u) = \Big(2\cos u,\ \operatorname{sen} u\Big) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

(ii) Si calcoli l'area della superficie in $\mathbb{R}^3$ data da

$$\Big\{(x,y) = \varphi(u)\ , z = v :\ u \in I\ ,\ 0 \le z \le x\Big\}\ .$$

Provare a farne un disegno.

2) Si trovi la funzione $u = u(x,t)$ che verifichi la seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} + u_x = 0\ , \qquad t > 0\ , \quad x \in \mathbb{R}\ ,\\ &u(\cdot, t) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}) \qquad \forall t\ ,\\ &u(x,0) = \chi_{(-1,1)}(x)\ . \end{aligned}$$

3) Si calcoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[Suggerimento: si consideri la funzione $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ e si usino le serie di Fourier.]

4) (i) Definire lo spazio $\mathcal{R}_p([0,1])$.
(ii) Dare un esempio di funzione in $\mathcal{R}_1([0,1])$ che non sia Riemann integrabile.
(iii) Dimostrare che $\mathcal{R}_2([0,1])$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}_1([0,1])$.

5) Costruire un sottoinsieme aperto di $(0,1)$ che non sia misurabile secondo Peano–Jordan.

6) Discutere la funzione di Cantor f e calcolarne l'integrale.