Prova scritta di AM4 del 13/1/2003
Appello A e recupero esoneri

Recupero I esonero: esercizi da 1) a 6).
Recupero teoria I esonero: esercizi 4), 5) e 6).
Recupero II esonero: esercizi da 7) a 11).
Appello A: esercizi 2), 3), 6), 7), 9), 11).

Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

1) Sia $f(t) := \operatorname{sen}^2 t \ \operatorname{sen}^2 \omega t$. Calcolare $\int f$ e $\lim_{\omega\to\infty} \int_0^1 f$.

2) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

3) Sia S la superficie parametrizzata da

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u^2 + 3 \\ z(u,v) = \tan v \end{cases}$$

con $v \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $u \in [0,1]$. Sia $f(x,y,z) = x + y + z$, calcolare

$$\int_S f d\sigma.$$

4) Enunciare e dimostrare il lemma di Sard in $\mathbb{R}$.

5) Discutere la funzione di Cantor.

6) Enunciare il teorema del cambio di variabili $\mathbb{R}^n$ per funzioni lineari. Enunciare il caso generale e darne la dimostrazione assumendo noto il caso lineare.

7) Sia $f_\alpha(x)$ la funzione con supporto in $[0,\pi]$ che coincide con $x^\alpha \operatorname{sen} x$ per $x \in [0,\pi]$. Sia F_α l'estensione dispari e periodica di periodo 2π di f_α.
(i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ sono definiti i coefficienti di Fourier di F_α?
(ii) Si denoti $\hat{F}_{\alpha,n}$ l'ennesimo coefficiente di Fourier di F_α. Calcolare $\hat{F}_{0,n}$ e $\hat{F}_{1,n}$.
(iii) Discutere come decadono i coefficienti di Fourier $F_{-1,n}$ e $F_{100,n}$ quando $|n| \to \infty$.

8) Sia $f(x)$ la funzione con supporto in $[-1,1]$ che coincide con $\operatorname{sen} x$ per $x \in (-1,1)$.
(i) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$.
(ii) Discutere la soluzione della seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} &u_t + u_{xxxx} = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x,0) = f(x) \ . \end{aligned}$$

9) Si dimostri che $\hat{f}$ è uniformemente continua se $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$

10) Si dimostri il seguente enunciato: *Siano B_j, $j \geq 1$, insiemi misurabili secondo Peano–Jordan tali che $B_{j+1} \subset B_j$ e tali che $\cap_j B_j$ sia un insieme di misura nulla. Allora* $\lim\limits_{j\to\infty} \operatorname{mis} B_j = 0$.

11) Si dimostri il teorema della divergenza nel caso in cui $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ abbia supporto compatto contenuto nell'insieme regolare $A \subset \mathbb{R}^n$.