Soluzioni 9-AM4

Laura Di Gregorio

27 novembre 2003

1)

a) Sia $st > 0$. Basta osservare che

$$\begin{aligned} st &= \exp(\log s + \log t) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} p \log s + \frac{1}{q} q \log t\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(p\log s) + \frac{1}{q}\exp(q \log t) \\ &= \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}. \end{aligned}$$

b) Basta usare n volte la relazione ottenuta di sopra per cui si ottiene

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Siano $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.
Definiamo $a_i \equiv \frac{|x_i|}{|x|_p}$ e $b_i \equiv \frac{|y_i|}{|y|_p}$, dalla relazione scritta sopra segue immediatamente che

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq |x|_p |y|_q.$$

c) Si deve dimostrare che

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Se $p = 1$ la disuguaglianza è vera. Sia $p > 1$. Siano $x, y \neq 0$ cioè $|x|_p \neq 0$ e $|y|_p \neq 0$. Definiamo $a, b \in \mathbb{R}_+^n$ i vettori le cui componenti siano $a_i = |x_i|$ e $b_i = |y_i|$.

E' evidente che $|x+y|_p \leq |a+b|_p$ e $|x|_p = |a|_p$ e $|y|_p = |b|_p$.
Si ha, applicando la disuguaglianza di Hölder dimostrata nel punto precedente e tenendo conto del fatto che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned} |a+b|_p &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leq (|a|_p + |b|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (|a|_p + |b|_p) |a+b|_p^{p-1} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$$

e da questa segue anche la disuguaglianza per x, y.

2)

a) L'omogeneità è banale.
Basta dimostrare che

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Come nell'esercizio precedente la disuguaglianza di Minkowski segue dalla disuguaglianza di Hölder.
Si dimostra prima la disuguaglianza di Hölder per funzioni semplici e poi per funzioni integrabili secondo Riemann.

Sia $f = \sum \alpha_i \chi_{R_i}$ e $g = \sum \beta_i \chi_{R_i}$. Non è restrittivo considerare gli stessi rettangoli.
Si ha $fg = \sum \alpha_i \beta_i \chi_{R_i}$.
Risulta

$$\int |fg| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \text{mis}(R_i)^{\frac{1}{p}} \text{mis}(R_i)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando che

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

si ha che

$$\int |fg| \leq \left(\sum a_i^p \text{mis}(R_i) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q \text{mis}(R_i) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ora dimostriamo la disuguaglianza di Hölder per funzioni integrabili secondo Riemann.
Possiamo supporre $f, g > 0$ e poi estendere il risultato a $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$.
Essendo f e g $\mathcal{R}$-integrabili, esistono $f_1, g_1 \in S(E)$ tali che $0 \leq f_1 \leq f$ e $0 \leq g_1 \leq g$ per cui

$$\int f \leq \int f_1 + \varepsilon \qquad \int g \leq \int g_1 + \varepsilon.$$

Si ha che, per la scelta di f_1 e f_2,

$$\int fg = \int [(f - f_1) + f_1][(g - g_1) + g_1] \leq C\varepsilon + \int f_1 g_1$$

dove C è una costante che dipende dal $\max f, g$.
Ora si può applicare la disuguaglianza di Hölder per funzioni semplici:

$$\int f_1 g_1 \leq |f_1|_p |g_1|_q.$$

Dimostriamo ora che vale la disuguaglianza di Minkowski per funzioni $\mathcal{R}$-integrabili.
Siano $f, g \in \mathcal{R}p(E)$.

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f + g|^{p-1} |f + g| \\ &\leq \int_E |f + g|^{p-1} |f| \int_E |f + g|^{p-1} |g| \end{aligned}$$

E' facile dimostrare che $\|f + g\| \in \mathcal{R}_q(E)$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e, per la disuguaglianza di Hölder, risulta:

$$\begin{aligned} \int_E |f + g|^{p-1} |f| &\leq \|(f + g)^{p-1}\|_q \|f\|_p \\ \int_E |f + g|^{p-1} |g| &\leq \|(f + g)^{p-1}\|_q \|g\|_p \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_q^{p-1} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) = \|(f + g)\|_p^{p-1} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).$$

Si ha che

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

b) Dimostriamo la disuguaglianza di Hölder per le funzioni di $\mathcal{R}_p(E)$.
Siano $f \in \mathcal{R}_p(E)$, $g \in \mathcal{R}_q(E)$ positive.
Dalla definizione esiste una successione di insiemi $A_j \uparrow E$ tali che f e g sono $\mathcal{R}$-integrabili su A_j e

$$\int_{A_j} f \uparrow \int_E f$$

$$\int_{A_j} g \uparrow \int_E g.$$

Sia R un rettangolo limitato non degenere $E \supset R \supset A_j$ tale che $f, g = 0$ su $R \setminus A_j$. Usando Hölder per le funzioni $\mathcal{R}$-integrabili si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{A_j} fg &= \int_R (f_{A_j})(g_{A_j}) \\
&\leq \left(\int_R |f_{A_j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R |g_{A_j}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{A_j} |f_{A_j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{A_j} |g_{A_j}|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Per come sono stati costruiti gli A_j:

$$\left(\int_{A_j} |f|_{A_j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{A_j} |g|_{A_j}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \uparrow \left(\int_E |f|_{A_j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|_{A_j}|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

c) Essendo f Riemann-integrabile su E, il Teorema di Vitali-Lebesgue dice che l'insieme dei punti di E su cui f è discontinua è un insieme di misura nulla.
Sia Q l'insieme di tali punti di discontinuità.
Affermo che $f = 0$ su $E \setminus Q$.
Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in E \setminus Q$ tale che $f(x_0) \neq 0$.
Essendo x_0 un punto di continuità esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathrm{B}_\delta(x_0)$ e questo contraddice l'ipotesi $\int_E |f| = 0$.

d) Definendo $Q = \bigcup_j \{\partial A_j \cup D(f|_{A_j})\}$ dove $D(f|_{A_j})$ è l'insieme dei punti di discontinuità di f ristretta ad A_je usando il fatto che f è $\mathcal{R}$-integrabile su A_j, si applica il risultato del punto d) e si ha la tesi.