Soluzioni 5-AM4

Laura Di Gregorio

23 ottobre 2003

1. Dalla definizione si ha che $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Dunque l'integrale si riduce ad uno del tipo:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\tanh x - 1} = -\int_0^2 \frac{e^{2x} - 1}{2}\, dx = -\frac{e^4}{4} - \frac{3}{4}.$$

2. Ponendo $\cosh x = t$ e ricordando che $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ si ottiene che per $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\, dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh^{-1} \sqrt{2}t = \cosh^{-1}(\sqrt{2}\cosh x) \end{aligned}$$

3. Facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \iint_S xy\, dxdy &= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} (2 + r\cos\varphi)\, d\varphi\, dr \\ &= 2\int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi\, dr + \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, dr = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

4. Facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = ta\cos\varphi & \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = ta\sin\varphi & \qquad 0 \le t \le 1 \\ z = tb \end{cases}$$

e calcolando $d\sigma = at\sqrt{a^2+b^2}$, si ha che

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^1 t^2\int_0^{2\pi} d\varphi\, dt = \frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}.$$

5. Si calcoli $ds = a\sqrt{2(1-\cos t)}$ e quindi, essendo la funzione integranda periodica e pari, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^2 ds &= a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}\, dt \\ &= a^3\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\, dt \\ &= 2a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\, dt. \end{aligned}$$

Ponendo $x = \tan\frac{t}{2}$ si ha che $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ e

$$\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\, dt = \sqrt{2^5}\int_0^{+\infty} x^5(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}\, dx.$$

Integrando per parti più volte si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^5(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}\, dx &= \Big[-\frac{x^4}{5}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\Big]_0^{+\infty} + \frac{4}{5}\int_0^{+\infty} x^3(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\, dx \\ &= \Big[-\frac{x^4}{5}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\Big]_0^{+\infty} \\ &\quad -\frac{8}{15}\int_0^{+\infty} x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx \\ &= \Big[-\frac{x^4}{5}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{8}{15}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$2a^3\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\,dt = 2\frac{8}{15}\,a^3\sqrt{2}\sqrt{2^5} = \frac{256}{15}\,a^3.$$