Soluzioni 11-AM4

Laura Di Gregorio

11 dicembre 2003

1) Le due condizioni omogenee $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ suggeriscono di cercare una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(t) \sin nx.$$

Mettendo tale espressione nell'equazione delle onde omogenea si ottiene che gli u_n devono soddisfare un'equazione del tipo

$$\ddot{u}_n + n^2 u_n(t) = 0$$

quindi saranno della forma

$$u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt. \tag{1}$$

Dalla condizione $u(x,0) = \sin^3 x$ segue che

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 x \sin nx dx$$

e dalla condizione $u_t(x,0) = 0$ segue che $b_n = 0$.
Dunque gli a_n sono i coefficienti di Fourier di $\sin^3 x$.
Risulta

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\Bigg(3 \sin x - \sin 3x\Bigg)$$

dunque $a_1 = \frac{3}{4}, a_3 = -\frac{1}{4}$ e $a_n = 0$ per $n \neq 1, 3$.
Mettendo questi coefficienti nella (1) si ottiene che la soluzione è

$$u(x,t) = \frac{3}{4} \cos t \sin x - \frac{1}{4} \cos 3t \sin 3x.$$

2) La condizione da imporre su f e g è che la loro estensione dispari sia $\mathrm{C}^4_{\mathrm{per}}$ e che le derivate soddisfino $f^{2k}(0) = f^{2k}(\pi) = g^{2k}(0) = g^{2k}(\pi) = 0$ per $0 \le k \le 2$.

3)

1. $\tilde{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi}$;

2. $\tilde{f}(\xi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\sin\xi}{\xi} - \displaystyle\int_0^1 x \cos x\xi \, dx \right)$.

   Svolgendo l'integrale si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi} - \frac{\sin\xi}{\xi} - \frac{\cos\xi}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - \cos\xi}{\xi^2}; \end{aligned}$$

3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $e^{-|x|}$. Risulta

$$\widetilde{e^{-|x|}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}$$

   e dalla formula

$$\widetilde{f(ax)}(\xi) = \frac{1}{a} \tilde{f}(\xi/a)$$

   si ottiene facilmente che

$$\widetilde{e^{-a|x|}}(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$