Soluzioni 1-AM4

Laura Di Gregorio

25 settembre 2003

1.

$$\frac{1}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{2Bx+C}{x^2+2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Dx^2+Ex+F}{x(x^2+2)}\right)$$

si sviluppa la derivata e si riduce allo stesso denominatore

$Ax(x^2+2)^2+(2Bx+C)x^2(x^2+2)+(2Dx+E)x(x^2+2)-(Dx^2+Ex+F)(3x^2+2) = 1$

Trovati A,B,C,D,E,F si ottiene la soluzione

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)^2} = -\frac{3}{8\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3x^2+4}{8x(x^2+2)}$$

2.

$$\frac{t^3+3}{(t+1)(t^2+1)} = 1 - \frac{t^2+t-2}{(t+1)(t^2+1)} = 1 - \frac{A}{t+1} - \frac{2Bt+C}{t^2+1}$$

Riducendo allo stesso denominatore si ha

$$A(t^2+1) + (2Bt+C)(t+1) = t^2+t-2.$$

Da cui si trova

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1$$

Si ottiene dunque la soluzione

$$\int \frac{t^3+3}{(t+1)(t^2+1)}\ dt = t + \ln|t+1| - \ln(t^2+1) + \arctan t$$

3. Sostituendo $e^x = y$ si ottiene

$$\frac{1+2y}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1}$$

da cui, procedendo come sempre, si ottiene la soluzione

$$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\,dx = -x + \frac{3}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1|$$

4. Sostituendo $t = \tan\frac{x}{2}$ si ottiene

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e quindi l'integrale diventa

$$\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{2dt}{t^2(1+t^2)} = -\frac{2}{t} - 2\arctan t = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}} - x$$

5. In questo caso è conveniente la sostituzione

$$x+1 = t^6$$

per cui l'integrale diventa

$$\int \frac{2+t^2}{1+t^3}\,6t^5\,dt = \frac{6}{5}t^5+4t^3-3t^2-6\ln|t+1|-3\ln(t^2-t+1)+2\sqrt{3}\arctan\frac{t-1}{\sqrt{3}}$$

6. Con la sostituzione

$$x = \frac{2-t^2}{2t}$$

si ottiene

$$\int \frac{(t^2+2)^2}{2t^2(t^2+t-2)}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{3}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t-2|$$

poi sostituisco $t = \sqrt{x^2+2} - x$ e osservo che $\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{2}$.

7. Con la sostituzione

$$x = \frac{t^2}{3-2t}$$

si ottiene il risultato

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x^2+3x}}{2-\sqrt{x^2+3x}}\,dx &= -2\int \frac{(t^2-3t)(3+t-t^2)}{(3-2t)^2(t^2-7t+6)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{9}{4(2t-3)} + 3\ln|3t-2| - \frac{12}{5}\ln|t-1| + \frac{12}{5}\ln|t-6|\end{aligned}$$

e poi sostituisco $t = \sqrt{x^2+3x} - x$

8. Con la sostituzione

$$x = -2\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(8-5\sqrt{4-x^2})} &= -\int \frac{tdt}{(1-t^2)(2+2t^2-5t)} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{18}\ln|t+1| + \frac{2}{9}\ln|t-2| + \frac{2}{9}\ln|2t-1|\end{aligned}$$

9. Ponendo $x = t^2$ si ha che

$$\int \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{2t-3\sqrt{t^2+1}}{t+\sqrt{1+t^2}}\,2tdt$$

Con la sostituzione $t^2+1 = (u+t)^2$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{2t-3\sqrt{t^2+1}}{t+\sqrt{1+t^2}}\,2tdt &= \int \frac{(5u^2+1)(1-u^2)(1+u^2)}{4u^3}\,du \\ &= -\frac{5}{6}u^4 - \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{8}u^{-2} + \frac{5}{4}\ln|u|\end{aligned}$$

dove $u = \sqrt{1+t^2} - t = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

10. Mediante la sostituzione

$$1 + \sqrt[4]{x} = t^3$$

da cui segue che $x = (t^3 - 1)^4$ e $dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt$ si ottiene

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\ dx = \int \left(\frac{6}{7}t^{14} - \frac{36}{11}t^{11} + \frac{9}{2}t^8 - \frac{12}{5}t^5 \right) dt$$

che è di facile integrazione.

11. Integrando per parti due volte, si ha

$$\begin{aligned} \int x(1+x^2)e^{x^2} \ln x\ dx &= \frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\left(2x\ln x + \frac{1+x^2}{x}\right) dx \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \frac{e^{x^2}}{2}\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\, x\, dx \end{aligned}$$

Ponendo $t = x^2$ nell'ultimo integrale, si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}}{2}(1+x^2)\ln x - \frac{e^{x^2}}{2}\ln x - \int \frac{e^{x^2}}{2}\, x\, dx &= \frac{e^{x^2}}{2}x^2\ \ln x - \int \frac{e^t}{4}\, dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}\, x^2 \ln x - \frac{e^{x^2}}{4} \end{aligned}$$