Prova scritta di AM4 dell'8/1/2004 – (II Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario svolgere in maniera sufficiente sia la parte I che la parte II.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

Parte I

1) Si calcoli $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ seguendo i seguenti passi:

(i) si deduca l'identità di Parseval per serie di Fourier reali

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

dall'identità di Parseval per serie di Fourier complesse $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$;

(ii) si calcoli la serie di Fourier della funzione pari e di periodo 2π che vale $\dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$;

(iii) si calcoli $\zeta(4)$ usando i punti precedenti.

2) Sia f la funzione con supporto in $[0,1]$ che vale x sull'intervallo $[0,1]$.

(i) Si calcoli $\hat{f}(\xi)$.

(ii) Calcolare $\hat{f}(0)$ e verificare, usando l'espressione esplicita per $\hat{f}(\xi)$, che $\hat{f}$ è continua in $\xi = 0$.

(iii) Si trovi la soluzione del problema $u_t - u_{xx} = 0$ per $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ con dato iniziale $u(0,x) = f(x)$;

(iv) si calcoli il limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ (giustificare accuratamente la risposta!).

Parte II

3) Dare lo schema della dimostrazione del teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$.

4) Enunciare e dimostrare il lemma di Riemann-Lebesgue per funzioni $\mathcal{R}_1(0, 2\pi)$.

5) Enunciare e dimostrare il teorema sulla inversione della trasformata di Fourier per funzioni $C_0^2(\mathbb{R})$.